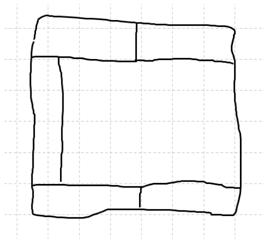
Éléments de correction et indication du barème

Le barème est sur 100 points.

Les exercices $1, 3, 4, 8, 10$ ont été proposés par la Chine.

Exercice 1 : 5 points



Un carré est recouvert de N rectangles, tous de mêmes dimensions, de telle sorte qu'il y a exactement deux rectangles sur les côtés horizontaux (haut et bas) et exactement un rectangle pour compléter le côté vertical.

Le dessin ci-contre (fait à main levée) où 5 rectangles sont représentés, illustre cette situation.

Combien de rectangles sont nécessaires pour recouvrir le carré en entier ? Justifier.

****

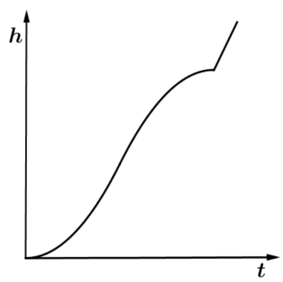
Éléments de correction : N=8. On a $2a = a + 2b$, d'où $a = 2b$. On peut raisonner ensuite sur la surface totale $4a^2 = Na\frac{a}{2}$ ce qui donne $N = 8$.

Barème : Valoriser la prise d'initiative et les compétences de résolution de problème. Ne pas pénaliser un candidat qui raisonne sur une longueur choisie du côté du carré.

Mettre 1 point pour une réponse correcte sans explication et 3 points s'il y a seulement une explication géométrique.

Mettre 3 points les relations algébriques (genre $a = 2b$).

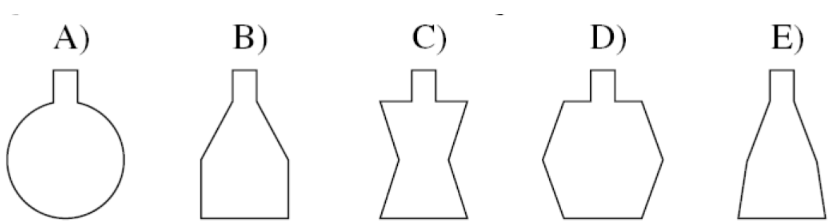
Exercice 2 : 5 points



Une bouteille (qui est un solide de révolution) a été remplie à un robinet dont le débit est constant.

Voici la courbe donnant la hauteur h de l'eau en fonction du temps t pendant le remplissage.

Quelle est la forme de la bouteille qui a donné cette courbe ? (Indiquer, sans justification, la lettre de la bouteille correspondante sur votre copie).



****

Éléments de correction : Réponse C. On déduit de la forme de la courbe que la bouteille se rétrécit, puis s'élargit et est ensuite de rayon constant.

Barème : Tout ou rien.

Exercice 3 : 5 points

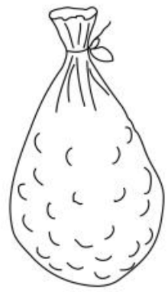
On considère deux nombres x et y tels que $-1 < x < 0$ et $-1 < y < 0$.
Classer, du plus petit au plus grand, les nombres x, xy, xy^2 et $\frac{1}{xy}$. Justifier.

****

Éléments de correction : $x < xy^2 < 0 < xy < \frac{1}{xy}$.

Barème : Mettre 2 points pour les réponses et 3 points pour les explications. Valoriser les démarches partielles ou sur des exemples.

Exercice 4 : 10 points



Un sac contient 20 billes, dont 9 billes blanches, 5 billes rouges 6 billes noires.
On enlève 10 billes du sac : on a pris entre 2 et 8 billes blanches, au moins 2 billes rouges et au plus 3 billes noires.

Donner le nombre de tirages possibles.
(Indiquer, sans justification, sur votre copie la lettre correspondant à votre résultat).

A) 12 B) 15 C)16 D) 18 E) 20

Éléments de correction : Réponse C. On fait une énumération rapide de tous les cas sous forme de tableau, sachant que $R \in [2,5], N \in [0,3]$ on vérifie alors que l'on a toujours $B \in [2,8]$.

Barème : Tout ou rien.

Exercice 5 : 10 points

On considère l'ensemble $\mathbb{W}$ des entiers de la forme $p^2 + q^2$, où p et q sont des entiers relatifs quelconques. Par exemple $25 = 3^2 + 4^2$ est dans cet ensemble $\mathbb{W}$.

Le produit de deux nombres de $\mathbb{W}$ appartient-il à $\mathbb{W}$? Justifier.

****

Éléments de correction : Réponse oui. On écrit $(p^2 + q^2)(r^2 + s^2) = (pr + sq)^2 + (qr - ps)^2$.

Barème : Exercice théorique. Valoriser les élèves qui ont compris l'énoncé, par exemple mettre 3 points pour des tentatives sur des exemples.
Mettre 3 points si le problème est posé avec des lettres et 2 points pour le développement. Valoriser de 2 points les tentatives de factorisation.

Exercice 6 : 10 points

Le quadrilatère $ABCD$ représenté dans l'annexe I a été dessiné dans un repère orthonormal qui a été effacé. On connaît les coordonnées de ses sommets dans ce repère :

$$A(-4; 2) \ ; \ B(2; -6) \ ; \ C(3; 6) \ ; \ D(1; 2).$$

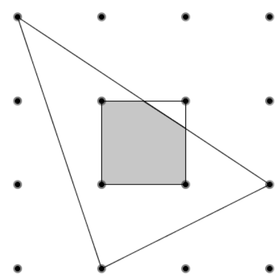
Retrouver le centre et les axes de ce repère.
(Expliquer votre construction et laisser apparents les traits de construction).

****

Éléments de correction : Le milieu de $[B, C]$ est sur l'axe Ox et droite (AD) est parallèle à l'axe Ox, ce qui permet de tracer Ox et de placer O par projection des points D, B par exemple. L'axe Ox est orienté vers le haut et l'axe Oy est orienté vers la gauche.

Barème : Mettre 4 points pour la construction et 6 points pour les explications (3 points pour un axe par exemple).

Exercice 7 : 15 points



Sur un quadrillage de points, on a tracé un triangle et un carré (voir figure ci-contre).
On prend comme unité le côté des carreaux du quadrillage.

Quelle est l'aire de la partie commune au triangle et au carré dessinés ?

****

Éléments de correction : Le triangle rectangle non grisé que l'on enlève est dans rapport hauteur/largeur de 2/3 (comme le triangle aux cotés parallèles construit sur le quadrillage, de cotés 3 et 2). En utilisant Thalès, (on note L la longueur) on a $\dfrac{(L+1)}{L} = \dfrac{1}{\frac{2}{3}L}$, donc la largeur L vaut 1/2, et l'aire est de 1/12. L'aire de la surface grisée est donc de 11/12.

Barème : Mettre 5 points pour la détermination du rapport longueur et largeur du triangle enlevé, 5 points pour leurs valeurs et 5 points pour la détermination de l'aire.

Exercice 8 : 10 points

Un commerçant vend des stylos sous deux formes : par paquets de 5 stylos, ou par paquets de 7 stylos.

1. ***Est-il possible d'acheter 50 stylos sans ouvrir de paquets ?***
   Si non, expliquer pourquoi ; si oui, donner toutes les possibilités.
2. ***Est-il possible d'acheter 2014 stylos sans ouvrir de paquets ?***
   Si non, expliquer pourquoi ; si oui, donner le nombre de possibilités.

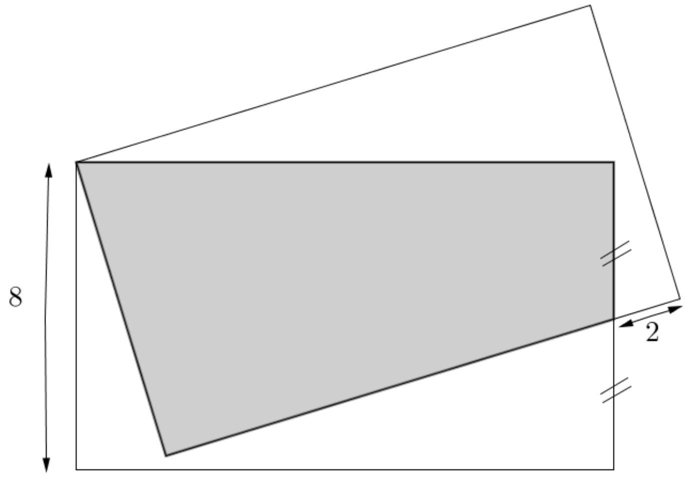
****

Éléments de correction :
Question 1 : il y a deux possiblités. Les seules possibilités sont $(10, 0)$ et $(3, 5)$.
Question 2 : On part de la solution $2014 = 2000 + 14$, donc $(400, 2)$ est la solution maximale pour les paquets de 5 stylos. On enlève au fur et à mesure, ensuite 7 paquets de 5 stylos et on ajoute 5 paquets de 7 stylos. En remarquant que $400 = 57 \times 7 + 1$. La solution minimale est donc $(1, 285)$ on trouve donc 58 solutions.

Barème : Mettre 3 points pour la première question et 7 points sur la seconde question (valoriser les candidats qui ont exhibé des possibilités sans arriver à les dénombrer).

Exercice 9 : 10 points

Deux rectangles de mêmes dimensions ont un sommet commun et se recouvrent partiellement comme le montre la figure codée ci-dessous (qui n'est pas réalisée en vraie grandeur).



Combien vaut l'aire de la partie grisée ?
(Indiquer, sans justification, sur votre copie la lettre correspondant à votre résultat).

A) Il manque des données pour pouvoir répondre.
B) 50
C) 60
D) 70
E) 80

****

Éléments de correction : Réponse D. On utilise deux fois Pythagore en coupant la partie grisée par une diagonale. On a donc $(L-2)^2 + 8^2 = 4^2 + L^2$, ce qui donne $L = 13$. Les aires des triangles valent $8 \times 11/2 = 44$ et $13 \times 4/2 = 26$. L'aire totale est donc 70.

Barème : Tout ou rien.

Exercice 10 : 20 points

Soient deux entiers naturels a et b qui vérifient l'égalité $9a + 9b = 2ab - 19$.

Déterminer toutes les possibilités pour a et b.

****

Éléments de correction : On peut étudier la fonction $a = f(b)$ qui permet d'obtenir des solutions entières par essais-erreurs.
On peut aussi factoriser $2ab - 9a - 9b = (2a+?)(b+?)$, ce qui amène à $(2b-9)(b-\frac{9}{2})$. Le problème est donc équivalent à résoudre $(2a-9)(2b-9) = 119 = 17 \times 7$. On a donc (à une symétrie près), $2a - 9 = 1$ et $2b - 9 = 119$ ou $2a - 9 = 17$ et $2b - 9 = 7$, ce qui donne $(5, 64)$ et $(13, 8)$. Il y a donc 4 solutions. On acceptera la réponse 2.

Barème : Mettre 5 points par réponse (2 réponses) sans explication (essais sur calculatrice, par exemple). Mettre 10 points sur les raisonnements (valoriser les essais infructueux genre $a = 1$ ne fonctionne pas).

FIN DE L'ÉPREUVE