MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Olympiades académiques de mathématiques

Classes de premières (série S)

Académies de Caen et de Rouen

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures au maximum chacune. **Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »). Sauf en cas de force majeure aucun candidat n'est autorisé à quitter la salle de composition moins de deux heures après le début.

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Première partie de l'épreuve

Exercice national numéro 1

Sommes de carrés en abyme

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des entiers naturels non nuls, qui à tout entier naturel non nul associe la somme des carrés des chiffres de son écriture décimale.
Ainsi, par exemple, $f(5) = 5^2 = 25, f(29) = 2^2 + 9^2 = 85, f(132) = 1^2 + 3^2 + 2^2 = 14$.

Introduction

1. *a.* Calculer $f(1)$, $f(11)$ et $f(111)$. Démontrer que tout entier naturel non nul admet au moins un antécédent par f.
b. Calculer $f(23), f(32)$ et $f(320)$.
c. Démontrer que tout entier naturel non nul admet une infinité d'antécédents par f.

La suite des images successives d'un entier

Étant donné un entier naturel non nul u_0, on considère la suite de nombres définie par u_0 et par ses images successives par f notées $u_1 = f(u_0)$, $u_2 = f(u_1)$, …, $u_{n+1} = f(u_n)$, etc.
2. Calculer les cinq premiers nombres de cette liste pour $u_0 = 301$, puis pour $u_0 = 23$ et pour $u_0 = 1030$.
Que peut-on en déduire pour les termes suivants de chacune de ces trois listes ?
3. Calculer les nombres $u_0, u_1, u_2, \dots u_8$ pour $u_0 = 4$.
Quels sont les nombres suivants de la liste dans ce cas ?

Étude d'une propriété

On souhaite démontrer la propriété suivante, notée $\mathcal{P}$ dans la suite du problème :
Si u_0 est un entier non nul :
- soit, il existe un rang N tel que, pour tout entier n supérieur ou égal à N, $u_n = 1$.
- soit, il existe un rang M tel que $u_M = 4$, et les termes suivants sont alors 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20, 4,…
On dit dans ce cas que la suite est périodique, de période 8, à partir du rang M.

On dispose de l'algorithme ci-contre.
4. *a.* Qu'affiche cet algorithme lorsque l'on saisit en entrée la valeur $u = 42$?
b. Justifier que si l'algorithme affiche « propriété vérifiée» pour une valeur u donnée alors u vérifie la propriété $\mathcal{P}$.
c. Comment le programme se comporterait-il si un nombre u ne vérifiait pas la propriété $\mathcal{P}$?
d. Tous les entiers naturels compris entre 1 et 99 vérifient la propriété $\mathcal{P}$. Expliquer comment cet algorithme peut permettre de le prouver.

```
Variable : u entier naturel non nul

Entrer u
   Tant que (u ≠ 1 et u ≠ 4)
   u ← f(u)
   Afficher u
Fin tant que
Afficher « propriété vérifiée »
```

Extension aux écritures à trois chiffres

On souhaite montrer que la propriété $\mathcal{P}$ s'étend aux entiers naturels non nul u_0 s'écrivant avec trois chiffres.
5. Soient a, b et c des entiers naturels inférieurs ou égaux à 9 tels que $a \neq 0$ et soit $x = 100a + 10b + c$.
a. Montrer que $x - f(x) \geq 99 + c - c^2 > 0$ et en déduire que $f(x) \leq x - 1$.
b. Si u_0 s'écrit avec trois chiffres, montrer qu'il existe un rang J tel que $u_J \leq 99$. Conclure.

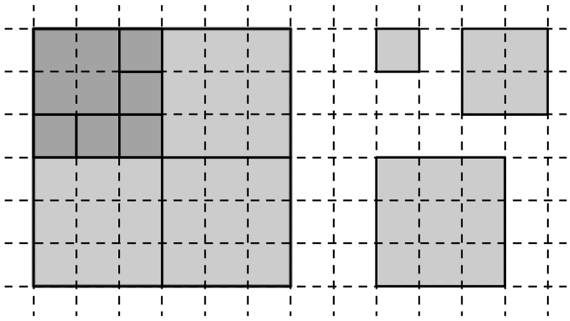
Généralisation

On souhaite montrer que la propriété est vraie pour tout entier naturel non nul u_0.
6. *a.* Montrer que, pour tout entier naturel p supérieur ou égal à 4, on a : $81p < 10^{p-1}$.
b. En déduire que, si un terme u_n de la suite s'écrit avec p chiffres $(p \geq 4)$, alors $u_{n+1} = f(u_n)$ s'écrit avec au plus $p - 1$ chiffres.
c. Montrer que pour tout entier u_0 il existe un rang K tel que $u_K \leq 999$. Conclure.

Exercice national numéro 2

1,2,3 … dallez !

Dans tout ce qui suit, n désigne un entier naturel non nul.
Une unité de longueur étant donnée, on considère un carré de côtés de longueur n. On note ce carré K_n, et on se propose de le paver à l'aide de carrés de côtés de longueur 1, 2 ou 3, c'est-à-dire de le recouvrir sans débordement ni chevauchement.
Par commodité, on dira qu'un carré de côtés de longueur i (i valant 1, 2 ou 3) est de taille i.
On montre ci-contre un pavage du carré K_6 comportant cinq carrés de taille 1, un de taille 2 et trois de taille 3.



1. ***a.*** Est-il possible de paver le carré K_6 en n'utilisant aucun carré de taille 1 ?
b. Montrer qu'il n'est pas possible de paver le carré K_5 sans utiliser de carré de taille 1.
c. Donner un pavage de K_5 comportant quatre carrés de taille 1. On admettra dans la suite qu'il n'existe pas de pavage de K_5 avec des carrés de taille 1, 2 ou 3 comportant strictement moins de quatre carrés de taille 1.

Tout carré K_n peut être pavé avec n^2 carrés de taille 1. Certains K_n peuvent l'être sans en utiliser. Dans cet exercice, on détermine le nombre minimal de carrés de taille 1 nécessaires au pavage du carré K_n par des carrés de taille 1, 2 ou 3 ; on note $u(n)$ ce nombre.

2. Déterminer $u(1)$, $u(8)$ et $u(9)$.

3. Plus généralement, que vaut $u(n)$ si n est pair ? Que vaut $u(n)$ si n est un multiple de 3 ?

On s'intéresse donc dorénavant aux entiers n impairs et non multiples de 3.

4. ***a.*** Montrer que si n est impair et non multiple de 3, alors $n+6$ est impair et non multiple de 3.
b. Montrer que, pour tout n supérieur ou égal à 4 : $u(n+6) \leq u(n)$ (on considérera les carrés K_{n+6} et K_n).

5. ***a.*** Peut-on paver un rectangle de largeur 5 et de longueur 6 en utilisant des carrés de tailles 2 et 3 ? En déduire que $u(11) \leq 1$.
b. Montrer que $u(13) \leq 1$.
c. On admet que $u(5) = 4$ (comme dit plus haut) et que $u(7) = 3$. Montrer que, pour tout entier n impair, non multiple de 3 et supérieur ou égal à 11, $u(n) \leq 1$.

Les carrés de taille 1 sont-ils indispensables ?

6. Pour tout entier n impair, on partage le carré K_n en n^2 cases carrées de taille 1 et on repère chaque case par un couple (i, j) où i est le numéro de la ligne et j le numéro de la colonne en partant de la case inférieure gauche (sur la figure, $n = 5$).
On affecte ensuite à chacune des cases, à partir du couple (i, j) qui la repère, le coefficient -1 si i et j sont pairs, 1 si i et j sont impairs et 0 sinon.

(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)
(2,1)				
(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)

a. Exprimer en fonction de n, la somme des coefficients de toutes les cases de K_n.
b. Démontrer que, si un carré de taille 3 fait partie d'un pavage du carré K_n, alors la somme des coefficients de toutes les cases qu'il recouvre est 3, 0 ou −3.
c. Quelle est la somme des coefficients des cases d'un carré de taille 2 utilisé dans les mêmes conditions ?
d. Quelle est la somme des coefficients d'un carré pavé par des carrés de taille 2 ou 3 ?
e. Conclure que, pour tout entier n :
- $u(n) = 0$ si n est un multiple de 2 ou de 3 ;
- $u(n) = 1$ si n est impair, non multiple de 3 et supérieur ou égal à 11.

f. Que vaut $u(2017)$?

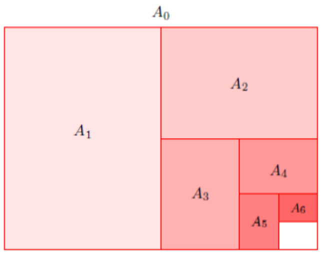
Seconde partie de l'épreuve

Exercice académique numéro 1

La constante de Pythagore

Partie A : format de papier

Le format papier A_0, A_1, A_2… est aujourd'hui la norme dans beaucoup de pays. Il a été conçu pour satisfaire à la définition du rectangle diagonal : en pliant une feuille en deux selon le schéma ci-dessous, on obtient un nouveau rectangle dont le rapport des dimensions est le même que celui du rectangle initial.



Les premières tentatives de légalisation de ce type de format ont pour cadre la Révolution française et les projets d'élaboration de normes dont celles du mètre étalon. Rapidement oubliée en France, c'est en Allemagne que ressurgit l'idée de cette norme. Elle s'impose à la communauté internationale au début du 20e siècle. L'avènement des machines à photocopier a conforté l'intérêt du rectangle diagonal comme format de référence.

1. Notons L la longueur et l la largeur d'un rectangle diagonal. Montrer que $\frac{L}{l} = \sqrt{2}$.

2. Sachant que l'aire d'une feuille A_0 est de 1 m², retrouver le format au mm près d'une feuille A4.

Partie B : Les mathématiques, c'est dangereux !

Selon Pythagore « tout est nombre ». Lui et ses disciples pensaient en outre que tous les nombres étaient des fractions. C'est dans le groupe des pythagoriciens que fut élaborée la preuve que la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1, c'est à dire $\sqrt{2}$, est un nombre irrationnel : ce fut un énorme scandale. La légende raconte qu'un des disciples, Hyppase de Métaque, accusé d'avoir révélé cette découverte, périt noyé, jeté à la mer par ses condisciples. C'est pourquoi $\sqrt{2}$ est parfois appelée la constante de Pythagore.

1. Montrer que le carré d'un nombre pair est pair et que le carré d'un nombre impair est impair.

2. Supposons qu'il existe une fraction irréductible telle que $\sqrt{\mathbf{2}} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$.

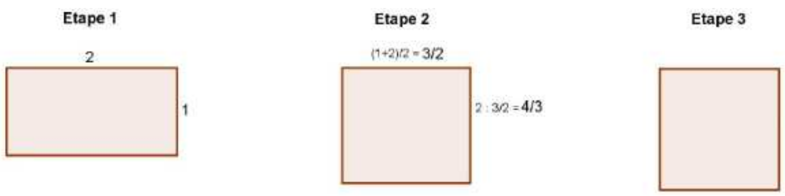
- ***a.*** Montrer que $a^2 = 2b^2$. Quelle est la parité de a ?
- ***b.*** En déduire que *b* est aussi un nombre pair.
- ***c.*** Pourquoi est-il absurde de penser qu'une telle fraction existe ?

3. Peut-on affirmer que $\sqrt{\mathbf{2}} = \dfrac{22\,619\,537}{15\,994\,428}$?

Partie C

Pour trouver une valeur approchée de $\sqrt{2}$, Héron d'Alexandrie propose une méthode fondée sur la construction d'une suite de rectangles d'aire 2. Il semblerait que cette méthode ait été employée par les babyloniens.

- On part d'un rectangle de longueur 2 (et donc de largeur 1) ;
- À chaque étape, on construit **un rectangle d'aire 2** dont la longueur est la moyenne des dimensions du rectangle précédent.



1. Calculer les dimensions du rectangle obtenu à l'étape 3. Dans le développement décimal de $\sqrt{\mathbf{2}}$, combien de décimales exactes obtient-on à cette étape ?

2. Proposer un algorithme qui permettrait d'obtenir les *n* premières décimales de $\sqrt{\mathbf{2}}$ en utilisant cette méthode, n étant un entier naturel choisi par l'utilisateur.

Actuellement les mathématiciens japonais Kanada et Takahashi détiennent le record : ils ont obtenu plus de 137 milliards de décimales exactes dans le développement décimal de $\sqrt{2}$

Exercice académique numéro 2

Le théorème de Guldin

Paul Guldin (1577-1643) est un mathématicien et astronome suisse.

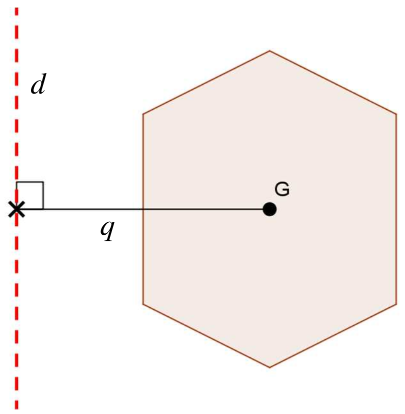
Il est notamment connu pour ses formules relatives aux calculs de volumes dans son traité ***Centrobaryca seu de Centro gravitatis***.

Il y énonce le théorème suivant :

Dans l'espace, on considère une surface d'aire A et on note G son centre de gravité. Le volume V engendré par la rotation de cette surface autour d'une droite d située dans son plan et ne la coupant pas est donné par :

$$\boldsymbol{V = 2\pi q A}$$

où q désigne la distance entre G et la droite d.



Dans ce problème, on se propose de démontrer le théorème de Guldin dans deux cas particuliers avant d'en entrevoir une application. Les trois parties de ce problème sont indépendantes.

Partie A – Le carré

Dans l'espace, on considère un carré ABCD de côté a et d une droite parallèle à (AD) située dans le plan (ABCD) (*cf. figure 1*). La rotation du carré autour de la droite d engendre un solide appelé tore à section carrée (*cf. figure 2*).

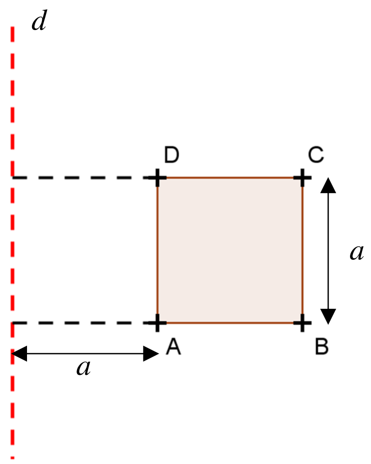


Figure 1

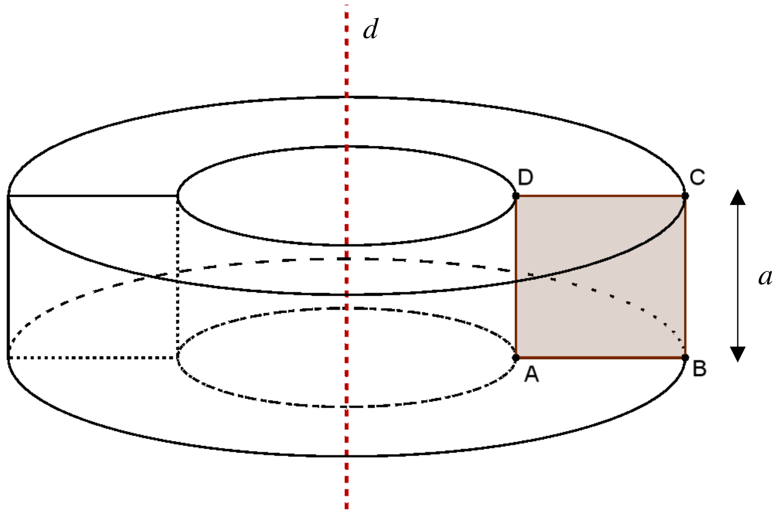


Figure 2

On suppose ici que le point A est à une distance a de la droite d. Le centre de gravité G du carré ABCD est situé à l'intersection de ses diagonales.

Déterminer le volume V de ce solide :

- sans utiliser le théorème de Guldin ;
- en utilisant le théorème de Guldin.

Partie B – Le triangle

On cherche d'abord à obtenir deux résultats préliminaires.

Résultat préliminaire 1

Dans l'espace, on considère un trapèze rectangle ABCD dont les bases [DC] et [AB] ont pour longueurs respectives a et b, comme sur la *figure 3*. On considère le solide obtenu par rotation de cette figure autour de la droite (AD) (*cf. figure 4*).

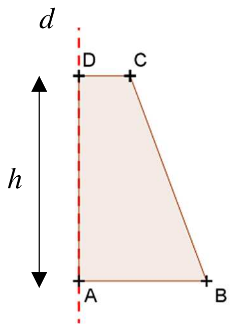


Figure 3

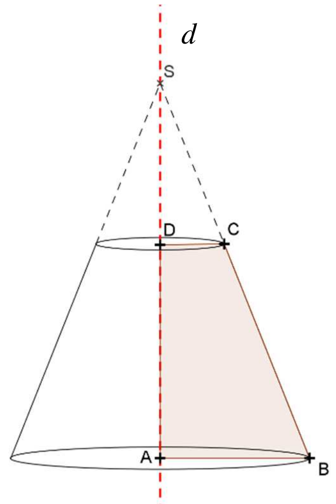


Figure 4

Sans utiliser le théorème de Guldin, démontrer que le volume du tronc de cône ainsi obtenu est donné par :

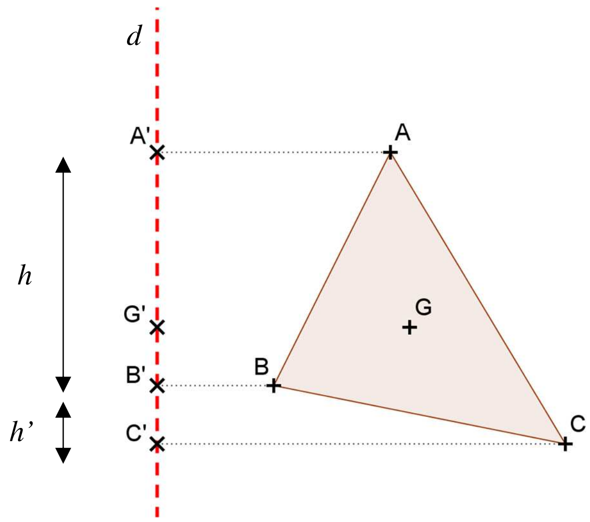
$$\boldsymbol{V = \frac{1}{3}\pi h(a^2 + ab + b^2)}$$

Résultat préliminaire 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ; I, J), on considère un triangle ABC quelconque et on note G son centre de gravité. On appelle $x_{\mathrm{A}}, x_{\mathrm{B}}, x_{\mathrm{C}}$ et x_{G} les abscisses respectives des points A, B, C et G dans ce repère.

1. Soit I le milieu du côté [AB]. En admettant que $\mathrm{GI} = \frac{1}{3}\,\mathrm{IC}$, démontrer que $\overrightarrow{\mathrm{GA}} + \overrightarrow{\mathrm{GB}} + \overrightarrow{\mathrm{GC}} = \vec{0}$.
2. En déduire que $x_{\mathrm{A}} + x_{\mathrm{B}} + x_{\mathrm{C}} = 3x_{\mathrm{G}}$.

On considère maintenant ce triangle ABC dans l'espace muni d'un repère orthonormé (O ; I, J, K).
On note A', B', C' et G' les projetés orthogonaux respectifs des points A, B, C et G sur la droite d.



Notations
AA' = m
BB' = n
CC' = p
GG' = q

Figure 5

On se propose de démontrer le théorème de Guldin dans le cas du solide engendré par la rotation de ce triangle autour de la droite d.

1. En utilisant trois troncs de cône judicieusement choisis, déterminer l'expression du volume V du solide ainsi engendré.
2. **En utilisant le résultat préliminaire 2**, démontrer le théorème de Guldin dans le cas du triangle, c'est-à-dire démontrer que $V = 2\pi q A_{\mathrm{ABC}}$, où $\boldsymbol{A}_{\mathbf{ABC}}$ désigne l'aire du triangle ABC.

Partie C – Une application du théorème de Guldin : le demi-disque

Dans cette partie, on souhaite déterminer la position du centre de gravité G d'un demi-disque de rayon $r = \mathrm{AB}$ et de centre A (*cf. figure 6*).

1. Quel solide est engendré par la rotation de ce demi-disque autour de la droite (AB) ?
2. Proposer une méthode permettant de déterminer la position du centre de gravité G de ce demi-disque.

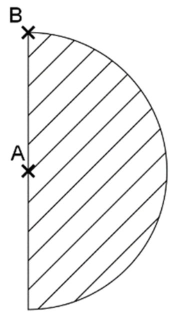


Figure 6