Description de l'activité

Flocon de Koch, ou Longueur et aire

Lire le document qui suit, et analyser les outils travaillés par les élèves et à quel(s) niveau(x) ils peuvent l'être. Puis imaginer divers scénarios en fonction du niveau des élèves et du temps pouvant être consacré à l'atelier.

Matériel : vidéoprojecteur, fichiers pdf et excel des activités, fiches-élèves.

Étape 1. Distribuer la page 1 de la fiche-élève 1 qui introduit la notion de fractale à l'aide d'objets de la vie courante.
Faire dessiner les premières étapes à l'aide d'une règle et d'un compas, avec l'algorithme de la fiche-élève 1. On réalise les étapes 0, 1 et 2 (attention, il vaut mieux démarrer à l'étape 0, plutôt qu'à l'étape 1, c'est plus simple pour les calculs par la suite).

Étape 2. Discussion. Faire parler les élèves sur les questions qu'on peut se poser à partir de là. En général, si on continue, « est-ce que ça grossit », « jusqu'où ça va »... Faire arriver aux notions de « périmètre » et « aires » et leur évolution au fil des figures.
Demander ensuite intuitivement ce qu'on peut penser de l'évolution du périmètre et de l'aire. Les limites infinies arrivent parfois, en tout cas si le périmètre devient infini les élèves pensent souvent que l'aire aussi. Les faire

réfléchir en disant que cela sort donc de l'écran, du mur etc. à un certain moment... ce qui semble contraire à l'intuition.
On regarde les étapes suivantes (fiche-élève 2).
Pourquoi utiliser cet algorithme pour obtenir le triangle et l'étoile ? Faire réfléchir à l'intérêt d'un algorithme pour programmer les différentes étapes sur ordinateur. Projeter les premières étapes : Création du flocon de Koch sur `https://fr.wikipedia.org/wiki/Flocon_de_Koch`

Étape 3. Recherche.
Les élèves cherchent comment évolue le périmètre. Les aider en leur disant éventuellement
- de commencer à calculer les périmètres des premiers flocons (mais en général ce n'est pas la peine de le leur dire) ;
- qu'on peut se simplifier la vie en supposant que le périmètre de notre triangle initial valait 1 unité (on avait donc pris 1 unité = 27 cm).

Étape 4. Tous ensemble. Distribution du tableau à compléter (fiche flocon-tableau ou flocon-tableau-troisieme suivant le niveau auquel on présente l'atelier).
Mise en évidence des différents coefficients de proportionnalité puis de la multiplication par 4/3.
Revenir à la fiche-élève 1, page 2, pour bien visualiser la multiplication du périmètre par 4/3 et écrire les premières valeurs du périmètre (introduire les puissances suivant le niveau auquel on réalise cet atelier) :
$P(0) = 1$ unité
$P(1) = P(0).\frac{4}{3} = \frac{4}{3}$
$P(2) = P(1).\frac{4}{3} = \frac{4}{3}.\frac{4}{3} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$
$P(3) = P(2).\frac{4}{3} = \left(\frac{4}{3}\right)^2.\frac{4}{3} = \left(\frac{4}{3}\right)^3$ mais aussi $P(3) = \frac{16}{9}.\frac{4}{3} = \frac{64}{27}$.
Au passage, on peut faire calculer les périmètres réels du dessin en transformant l'unité en centimètres...

Étape 5. On passe au vidéoprojecteur avec le fichier Flocon-tableur (colonnes A à D) pour étendre le tableau et "voir" que le périmètre ne cesse de croître.
Ouvrir un fichier vierge ou déjà commencé. Selon les choses dites précédemment par les élèves, commencer avec seulement les colonnes « étape », « périmètre » (voire « aire ») ou bien aussi avec les colonnes intermédiaires. Mais il faut rapidement introduire les colonnes « nombre de côtés » et « longueur d'un côté » pour calculer le périmètre (et l'aire.) Il faudra fixer la longueur d'un côté (soit 1/3 si on a fixé le périmètre égal à 1 à l'étape 0, soit 9 cm par exemple si on veut calculer le périmètre en centimètres).

	A	B	C	D
2	l=	9,00		
3				
4				
5				
6	**Etape n**	**Nombre de côtés**	**Longueur de chaque côté**	**Périmètre P(n)**
7	0	3	9	27
8	1	12	3	36
9	2	48	1	48
10	3	192	0,333333333	64
11	4	768	0,111111111	85,33333333
12	5	3072	0,037037037	113,7777778
13	6	12288	0,012345679	151,7037037
14	7	49152	0,004115226	202,2716049
15	8	196608	0,001371742	269,6954733
16	9	786432	0,000457247	359,5939643
17	10	3145728	0,000152416	479,4586191
18	11	12582912	5,08053E-05	639,2781588
19	12	50331648	1,69351E-05	852,3708784
20	13	201326592	5,64503E-06	1136,494505
21	14	805306368	1,88168E-06	1515,326006
22	15	3221225472	6,27225E-07	2020,434675
23	16	12884901888	2,09075E-07	2693,9129
24	17	51539607552	6,96917E-08	3591,883866

Attention, c'est en format « standard ». En mode « format de cellule » « nombre » avec 9 chiffres après la virgule par exemple, le tableur n'affiche très rapidement que des "0" ! Étudier la réaction des élèves...
En général, les élèves ont trouvé à l'étape précédente que la suite des périmètres était géométrique de raison $\frac{4}{3}$ (même s'ils ne connaissent pas la notion explicitement) et on le retrouve par multiplication du 4 et du $\frac{1}{3}$.
Ensuite, on peut faire varier la longueur d'un côté du triangle de départ, et voir comment le périmètre évolue : si on multiplie la longueur par 3, le périmètre est mutiplié par ... ? *On pourra se demander comment évolue*

l'aire alors, d'où la nécessité de rajouter des colonnes pour la calculer, mais le passage aux surfaces est plus délicat, voir Étape 7...

Étape 6 (suivant le niveau auquel on réalise cet atelier). On tente ici de "montrer" que le périmètre tend vers l'infini. En Troisième ou avec une bonne classe en fin de Quatrième (manipulation des puissances).
Reprendre la page 2 de la fiche-élève 1.
On a vu (à l'étape 4) que : $P(3) = \frac{64}{27}$.
Donc : $P(3) > 2$.
Mais alors :

$$P(30) = \left(\frac{4}{3}\right)^{30} = \underbrace{\frac{4}{3}.\frac{4}{3}.\frac{4}{3}.\frac{4}{3}.\ \dots\ .\frac{4}{3}.\frac{4}{3}.\frac{4}{3}}_{30 \text{ facteurs } \frac{4}{3}}$$

$$= \underbrace{\left(\frac{4}{3}.\frac{4}{3}.\frac{4}{3}\right) \cdot \left(\frac{4}{3}.\frac{4}{3}.\frac{4}{3}\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{4}{3}.\frac{4}{3}.\frac{4}{3}\right)}_{10 \text{ paquets } \left(\frac{4}{3}.\frac{4}{3}.\frac{4}{3}\right)}$$

Or, chaque paquet $\left(\frac{4}{3}.\frac{4}{3}.\frac{4}{3}\right)$ vaut $\left(\frac{4}{3}\right)^3$ et est plus grand que 2.
Donc :

$$P(30) > \underbrace{2.2.\ \dots\ .2}_{10 \text{ facteurs } 2}$$

C'est-à-dire $P(30) > 2^{10}$. Or, $2^{10} = 1024 > 1000 = 10^3$. D'où :

$$P(30) = \left(\frac{4}{3}\right)^{30} > 10^3.$$

On considère maintenant

$$P(300) = \left(\frac{4}{3}\right)^{300} = \underbrace{\frac{4}{3}.\frac{4}{3}.\ \dots\ .\frac{4}{3}.\frac{4}{3}}_{300 \text{ facteurs } \frac{4}{3}}$$

$$= \underbrace{\left(\frac{4}{3}\right)^{30} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{30} \dots \left(\frac{4}{3}\right)^{30}}_{10 \text{ paquets } \left(\frac{4}{3}\right)^{30}}$$

Or, chaque paquet $\left(\frac{4}{3}\right)^{30}$ vaut $P(30)$ et est plus grand que 10^3.
Donc :

$$P(300) > \underbrace{10^3.10^3.....10^3}_{10 \text{ facteurs } 10^3} = \underbrace{(10.10.10).(10.10.10).....(10.10.10)}_{10 \text{ facteurs } (10.10.10)} = \underbrace{10.10.\ldots.10}_{30 \text{ facteurs } 10}$$

C'est-à-dire $P(300) > 10^{30}$.
Les élèves sentent ainsi que quelle que soit la puissance de 10 que l'on prend, on va trouver une étape pour laquelle le périmètre lui est supérieur.

Cette partie de l'atelier peut se reprendre au lycée (sans autant de détails) où on introduit les suites géométriques et leurs limites.

Étape 7. Et si on réfléchissait au problème du calcul de l'aire ? Il va falloir calculer l'aire d'un triangle équilatéral. L'occasion de revoir le calcul de l'aire d'un triangle, et le théorème de Pythagore. Pour les plus jeunes, on peut se contenter de les faire réfléchir en leur donnant l'expression de l'aire du triangle équilatéral : on peut se fixer une aire de départ et utiliser le tableur pour voir ce qui se passe.
Reprenons le tableur.
Si on n'a pas fait calculer l'aire du triangle F_0 ($A(0) = \sqrt{3}\frac{\ell^2}{4}$ si le triangle F_0 a des côtés de longueur ℓ), on peut commencer brutalement en rentrant l'expression dans le tableur :

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2	l=	9,00			a=	=RACINE(3)*B2^2/4	
3							
4							
5							
6	**Etape n**	**Nombre de côtés**	**Longueur de chaque côté**	**Périmètre P(n)**			**Aire A(n)**
7	0	3	9	27			35,07402885
8	1	12	3	36			
9	2	48	1	48			
10	3	192	0,333333333	64			
11	4	768	0,111111111	85,33333333			
12	5	3072	0,037037037	113,7777778			
13	6	12288	0,012345679	151,7037037			
14	7	49152	0,004115226	202,2716049			
15	8	196608	0,001371742	269,6954733			
16	9	786432	0,000457247	359,5939643			
17	10	3145728	0,000152416	479,4586191			

Mais à l'étape suivante, pour obtenir l'étoile, il faut introduire la surface des petits triangles que l'on rajoute « car c'est la surface du flocon à l'étape précédente plus trois fois la surface des petits triangles ajoutés ». On est facilement amené à introduire une colonne supplémentaire, celle donnant le nombre de "petits triangles ajoutés" pour passer d'une étape à la suivante

	A	B	C	D	E	F	G
2	l=	9,00			a=	35,07403	
3							
4							
5							
6	Etape n	Nombre de côtés	Longueur de chaque côté	Périmètre P(n)	Nombre de petits triangles ajoutés	Aire de chaque triangle ajouté	Aire A(n)
7	0	3	9	27			35,07402885
8	1	12	3	36	=B7	3,897114317	46,7653718
9	2	48	1	48	12	0,433012702	51,96152423
10	3	192	0,333333333	64	48	0,048112522	54,2709253

puis celle de l'aire d'un petit triangle, que l'on obtient facilement à l'étape précédente puisqu'à chaque étape la longueur des côtés des petits triangles ajoutés est divisée par 3 (attention, la formule est légèrement différente pour passer de l'étape 0 à l'étape 1, et pour passer d'une étape n à l'étape $n+1$ si $n \geq 1$) :

	A	B	C	D	E	F	G
2	l=	9,00			a=	35,07403	
3							
4							
5							
6	Etape n	Nombre de côtés	Longueur de chaque côté	Périmètre P(n)	Nombre de petits triangles ajoutés	Aire de chaque triangle ajouté	Aire A(n)
7	0	3	9	27			35,07402885
8	1	12	3	36	3	=G7/9	46,7653718
9	2	48	1	48	12	0,433012702	51,96152423
10	3	192	0,333333333	64	48	0,048112522	54,2709253

	A	B	C	D	E	F	G
2	l=	9,00			a=	35,07403	
3							
4							
5							
6	Etape n	Nombre de côtés	Longueur de chaque côté	Périmètre P(n)	Nombre de petits triangles ajoutés	Aire de chaque triangle ajouté	Aire A(n)
7	0	3	9	27			35,07402885
8	1	12	3	36	3	3,897114317	46,7653718
9	2	48	1	48	12	=F8/9	51,96152423
10	3	192	0,333333333	64	48	0,048112522	54,2709253

On demande quelle formule mettre en G8 :

	A	B	C	D	E	F	G
2	l=	9,00			a=	35,07403	
3							
4							
5							
6	Etape n	Nombre de côtés	Longueur de chaque côté	Périmètre P(n)	Nombre de petits triangles ajoutés	Aire de chaque triangle ajouté	Aire A(n)
7	0	3	9	27			35,07402885
8	1	12	3	36	3	3,897114317	=G7+E8*F8
9	2	48	1	48	12	0,433012702	51,96152423
10	3	192	0,333333333	64	48	0,048112522	54,2709253

Avant de recopier les formules, on demande ce qui va se passer : comment évolue l'aire ? Mystère...

Attention encore à l'affichage avec lequel on peut jouer : en mettant en « format de cellule » « nombre » avec 5 chiffres après la virgule par exemple, le tableur affiche assez vite des "zéro" dans les aires rajoutées et on a l'impression que la surface s'arrête de grandir...

Il est bien sûr possible de procéder autrement pour calculer l'aire d'un petit triangle ajouté, par exemple en utilisant les cellules donnant la longueur d'un côté et la formule donnant l'aire d'un triangle équilatéral. Suivant les classes, c'est l'une ou l'autre option qui apparaît en premier.

Pour aller plus loin...

Notons toujours ℓ la longueur d'un côté du triangle de départ F_0.
Le nombre de côtés de F_n est 3.4^n.
Chaque côté de F_n a pour longueur $\frac{\ell}{3^n}$, et $P(n) = 3\ell\left(\frac{4}{3}\right)^n$.
Le nombre de petits triangles ajoutés à l'étape $n \geq 1$ est $t(n) = 3.4^{n-1}$ et chacun a pour aire $a(n) = a(n-1)/9 = \frac{A(0)}{9^n}$. L'aire $A(n)$ de F_n vérifie :

$$A(n+1) = A(n) + t(n+1).a(n+1) = A(n) + 3.4^n.\frac{A(0)}{9^{n+1}},$$

c'est-à-dire $A(n+1) = A(n) + \frac{A(0)}{3}.\left(\frac{4}{9}\right)^n$.
En additionnant les égalités précédentes de $n = 0$ à $n = N-1$, on obtient

$$A(N) = A(0) + \frac{A(0)}{3}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{4}{9}\right)^k = A(0) + \frac{A(0)}{3}.\frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^N}{1-\frac{4}{9}} = \left[\frac{8}{5} - \frac{3}{5}\left(\frac{4}{9}\right)^N\right]A(0).$$

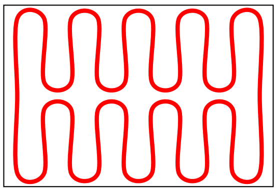
D'où l'aire (limite) du flocon de Koch

$$\lim_{N\to+\infty} A(N) = \frac{8}{5}A(0) = \frac{8}{20}\sqrt{3}\,\ell^2.$$

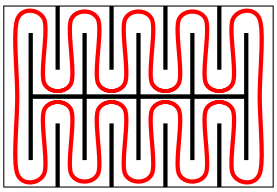
Niels Fabian Helge von Koch (1870 – 1924) était un mathématicien suédois. Le principe de la courbe de Koch a été utilisé pour construire des murs anti-bruit bien plus efficaces que les murs classiques.

Un exemple d'objet fractal dans la nature, le chou romanesco : mais on peut citer aussi la côte bretonne ou les poumons !

En Troisième, on peut monter un atelier en commun avec le professeur d'anglais en projetant “Measuring coastline” du programme Numberphile qui propose de nombreux sujets de mathématiques en anglais :
https://www.youtube.com/watch?v=7dcDuVyzb8Y
Et pour terminer l'atelier, la question suivante : comment passer à travers une feuille de papier A5, de la tête aux pieds, sans la déchirer ?
Il s'agit de tracer dans la feuille une ficelle de longueur suffisamment grande...



... et de la "libérer"...
Pour cela, il suffit d'effectuer le découpage ci-dessous en noir



PARIS IREM

LES MATHS FANTASTIQUES