Olympiades académiques de mathématiques

Académie de CAEN

SUJET S

Mercredi 18 mars de 8 h à 12 h

Les objets calculatrices sont autorisés, à l'exclusion de tout autre appareil électronique.

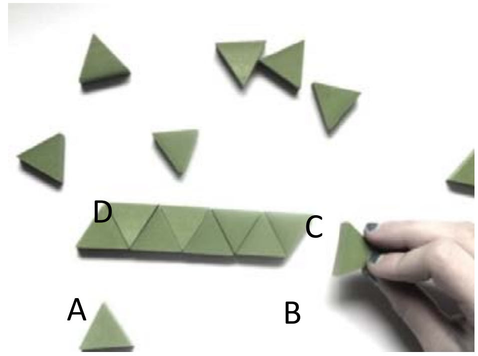
Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

L'épreuve comporte quatre exercices, tous à traiter dans le temps imparti. Il est conseillé de ne pas en privilégier trop fortement un sur les autres.

Durée de la composition : 4 heures

Sauf cas de force majeure, aucun candidat n'est autorisé à quitter définitivement la salle de composition moins de 2h après le début. Un candidat qui quitterait la salle au bout de trois heures ou moins doit rendre sa copie et son exemplaire du sujet.

Exercice numéro 1 : Défi entre sœurs



Patiemment, Clémence aligne les triangles équilatéraux identiques de son jeu de mosaïque en les juxtaposant comme le montre la photo ci-contre.

Sa sœur, Léa, qui est en première et toujours en quête de quelques calculs à effectuer, s'amuse à trouver la **valeur exacte** des longueurs des diagonales des quadrilatères obtenus.

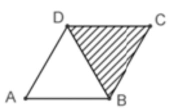
Chaque triangle équilatéral a pour côté 1. On note :

- ABCD un quadrilatère construit par Clémence ;
- L = AC la longueur de la diagonale [AC] ;
- l = BD la longueur de la diagonale [BD].

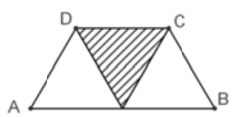
Partie A

1. Calculer la longueur d'une hauteur d'un triangle équilatéral de côté 1.

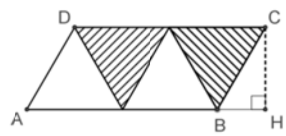
2. Calculer les longueurs l et L pour les cas suivants :



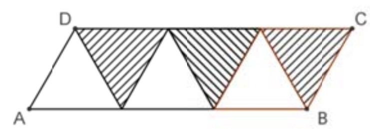
Deux triangles



Trois triangles



Quatre triangles



Six triangles

Partie B

Clémence continue à ajouter des triangles et défie sa sœur de poursuivre ses calculs de diagonales. Léa note n le nombre de triangles équilatéraux alignés (n est un entier supérieur ou égal à 2) et se met à chercher :

1. Lorsque le nombre n de triangles est **pair,** montrer que la longueur de la diagonale la plus grande est égale à $L = \sqrt{p^2 + p + 1}$, où $p = \frac{n}{2}$.

2. Si Clémence ajoute un triangle supplémentaire au cas précédent, que deviennent les longueurs l et L ?

3. Clémence a aligné 56 triangles. Déterminer les longueurs l et L calculées par Léa.

Partie C

Observant tous les calculs de longueur de diagonales effectués, Léa conjecture deux propriétés :

1re propriété : « Pour tout nombre n de triangles juxtaposés, L est la racine carrée d'un nombre impair »

2e propriété : « Pour tout nombre n de triangles juxtaposés, L est la racine carrée d'un nombre premier »

On rappelle qu'un nombre premier est un entier naturel divisible seulement par 1 et lui-même ; par exemple 2, 11, 29 sont des nombres premiers et 1, 8, 33 ne le sont pas.

1. Valider ou invalider chacune de ces propriétés.

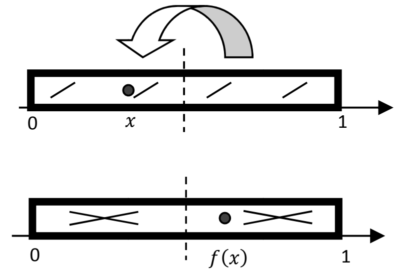
2. Peut-on affirmer que la racine carrée de tout nombre premier est la longueur possible d'une diagonale d'un quadrilatère ABCD du type ci-dessus ?

3. Pourquoi n'est-il pas possible d'obtenir une diagonale de longueur $\sqrt{2\,015}$?

4. Clémence a construit un quadrilatère dont une diagonale mesure $\sqrt{1\,015\,057}$. Combien de triangles a-t-elle utilisés ? Donner toutes les réponses possibles.

5. Clémence dit à sa sœur : « sur les grands quadrilatères, à chaque fois qu'on ajoute deux triangles, la diagonale augmente d'environ 1 ». Le constatez-vous aussi ? (détailler la démarche). Si oui, le démontrer.

Exercice numéro 2 : On est les rois !



Le boulanger place une fève, replie la pâte (qu'il a, ici, préalablement striée) sur elle-même, et l'étale dans le sens de la longueur : celle-ci s'étire jusqu'à retrouver ses dimensions initiales. Cette transformation, que l'on peut répéter, a donné lieu à quelques études mathématiques, dont cet exercice s'inspire.

Partie A – La transformation du boulanger

On considère la fonction f définie sur $[0\,,1]$ par :

$$f(x) = 2x \text{ si } x \leq \frac{1}{2} \text{ et } f(x) = 2(1-x) \text{ sinon.}$$

1. Montrer que l'image par f d'un élément de [0, 1] appartient à [0, 1].

2. Justifier pourquoi cette fonction f modélise le déplacement de la fève.

Partie B – Parcours d'une fève : cycles et cible

Les images successives par f d'un élément x de $[0\,,1]$ sont notées $x_1 = f(x)$, $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$ etc. Elles correspondent aux positions successives de la fève initialement placée à l'abscisse x.

1. Quelles sont les 9 positions qui suivent l'abscisse $\frac{1}{3}$? l'abscisse 0, 33 ? Commenter.

2. Est-il possible qu'une fève, placée à l'abscisse x, revienne à sa position de départ en un seul coup ? En deux coups (mais pas en un) ? En trois coups (mais ni en un ni en deux) ? Préciser à chaque fois toutes les valeurs de x pouvant répondre à la question.

3. Quand une fève placée à l'abscisse x vient, après un nombre fini d'étapes du processus, à occuper l'abscisse nulle, on dit que « x atteint sa cible ». Donner un exemple où x atteint sa cible, et un autre où x ne l'atteint pas.

4. Le nombre $\frac{2015}{2^{2015}}$ atteindra-t-il la cible ?

5. Déterminer tous les nombres de $[0\,,1]$ atteignant leur cible.

Partie C – Étude d'un algorithme.

1. Soit un nombre x dont on suppose qu'il atteint la cible. Modifier l'algorithme proposé en **Annexe** afin qu'il affiche, dans ce cas, le nombre d'étapes nécessaires pour rejoindre le réel 0 (on recopiera le nouveau code sur sa copie).

2. D'après les questions **B.5**. ou même **B.2.**, le nombre $\frac{1}{9}$ n'atteint pas sa cible. Comment devrait se comporter l'algorithme après avoir saisi $x = \frac{1}{9}$ en entrée ? Quand on le programme sur une machine de type PC ou calculette, toujours avec $x = \frac{1}{9}$ en initialisation, puis qu'on l'exécute, il affiche cependant en sortie obtenir $x = 0$ au bout d'une cinquantaine d'itérations. Avancer une explication.

Exercice numéro 3 : Des triangles équilibrés

Introduction : faire des calculs modulo p

Définition : $x + y = r$ modulo p où
r est le reste dans la division euclidienne de $x + y$ par p,
r est un entier et $r \in \{0 ; 1 ; 2 ; \ldots ; p-1\}$

Le résultat d'un calcul modulo p est un entier compris entre 0 et p-1.

Comme Monsieur Jourdain qui disait de la prose sans le savoir, tout le monde sait calculer modulo 12.
Ainsi si l'aiguille indique 9h sur un cadran de montre, 25h plus tard elle indique 10h.
$9 + 25 = 34 = 12 \times 2 + 10$, ainsi 10 est le reste dans la division euclidienne de 34 par 12.
Donc $9 + 25 = 10$ modulo 12.

1. Triangle de Steinhaus modulo 2 :

Dans cette partie, toutes les additions seront faites modulo 2 avec les 4 opérations possibles :
$0 + 0 = 0$ $1 + 0 = 1$ $0 + 1 = 1$ $1 + 1 = 0$.

Définition et construction d'un triangle de Steinhaus modulo 2 de taille 5 par un exemple.
On crée un triangle constitué de 0 et de 1 en deux étapes de la façon suivante :

- créer une première ligne avec 5 nombres 0 ou 1,
- calculer en additionnant modulo 2, pour obtenir les lignes suivantes du triangle.

Ainsi, le triangle associé à 0 0 1 0 1 est ci-contre.

0 0 1 0 1
0 1 1 1
1 0 0
1 0
1

Définition : Un triangle est dit équilibré s'il contient autant de 0 que de 1.

a) Le triangle de taille 6 modulo 2 associé à 0 0 1 0 1 0 est-il équilibré ?
b) Trouver un triangle équilibré de taille 4 modulo 2.
c) Dessiner tous les triangles de taille 3 modulo 2 et entourer ceux qui sont équilibrés.
d) Déterminer une formule qui donne le nombre de triangles modulo 2 de taille n.
e) Déterminer toutes les valeurs de n pour lesquelles il est impossible de créer un triangle équilibré modulo 2. On rédigera la conclusion ainsi :

« Il n'y a pas de triangle équilibré d'ordre n si n est de la forme … ou de la forme … »
Un exemple de formulation : n est un carré parfait si n est de la forme $n=k^2$ où $k \in N$

On rappelle la formule suivante : $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

2. Triangle de Steinhaus modulo p :

a) Calculer le triangle de Steinhaus de taille 5 modulo 5 associé à 2 2 0 3 3 et vérifier qu'il est équilibré (c-à-d qu'il contient autant de 0, que de 1, de 2, de 3 et de 4).
b) On suppose qu'on a réussi à construire un triangle équilibré de taille n, modulo p

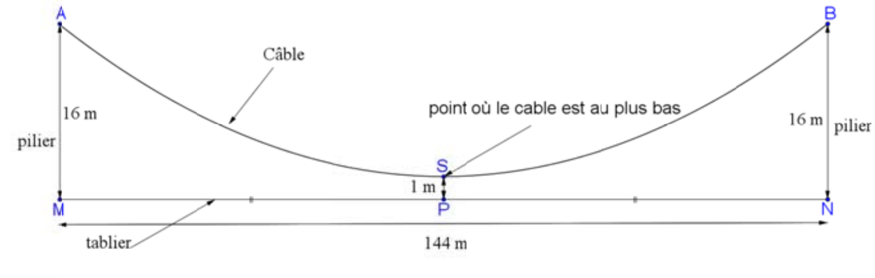
On fait la somme (en base 10 classique) des nombres dans le triangle (dans l'exemple précédent, on obtient 30) Déterminer une formule générale de cette somme en fonction de n et p.

c) On ne sait pas démontrer (pour l'instant) qu'il existe une infinité de triangles équilibrés pour n'importe quelle valeur de p. Par contre on peut le démontrer facilement pour p=3 en construisant des triangles de plus en plus grands « facilement ».

Trouver les deux triangles de taille 3 équilibrés modulo 3.
En déduire un triangle de taille 6 équilibré modulo 3.
Construire alors un triangle de taille 9 équilibré modulo 3.

Exercice numéro 4 : Le pont suspendu

Un pont suspendu à une longueur de 144 m et les piliers mesurent 16 m. Le câble de retenue d'un pont suspendu présente la forme d'une parabole. Le point où le câble est le plus bas est au milieu du pont. Il est à une hauteur de 1 m au-dessus du tablier.

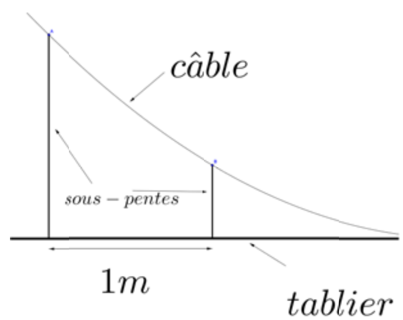


1. Déterminer une équation de la parabole que décrit le câble dans un repère judicieusement choisi.

2. Repérage de la zone dangereuse :

Les sous pentes sont les tiges verticales reliant le tablier du pont au câble de retenue.

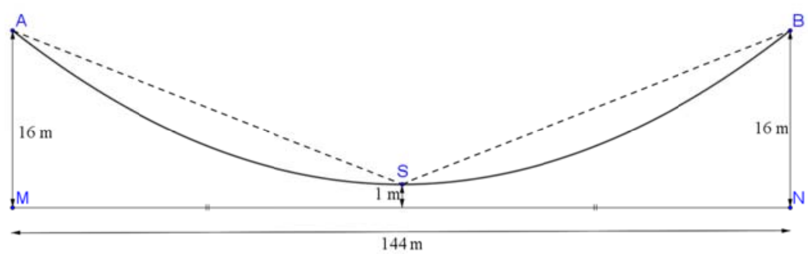
Elles sont placées tous les mètres. La première étant placée 1 m après le premier pilier, la dernière à 1 m avant le deuxième pilier. On considère que le pont est dangereux dans la zone où les sous-pentes mesurent moins de 2 m. La zone dangereuse doit être équipée de caméras de surveillance.



Calculer l'étendue de la zone dangereuse.

3. Estimations la longueur du câble de retenue

a) Le calcul de la longueur exacte du câble dépasse nos compétences. On peut néanmoins l'estimer en « remplaçant » les deux arcs de paraboles qui mènent de A à S et de S à B par les segments [AS] et [SB].

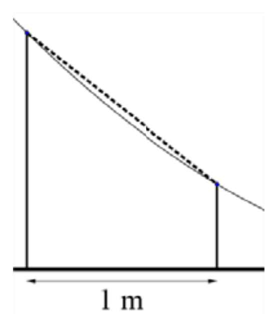


Avec cette méthode, estimer la longueur du câble.

On peut obtenir une meilleure estimation en « remplaçant », entre chaque sous –pentes, l'arc de parabole par un segment.

b) Écrire un algorithme qui permet de calculer une valeur approchée de la longueur du câble avec cette méthode.

c) Programmer votre calculatrice pour donner cette estimation.



ANNEXE DE L'EXERCICE 1

```
Variables
        x est un élément de [0 ,1]
Début
        Saisir  le nombre x compris entre 0 et 1
        Tant que x ≠ 0  faire
                Si  x ≤ 1/2  alors
                        x prend la valeur 2 x
                Sinon
                x prend la valeur 2(1 − x)
        Fin tant que
Fin
```