Etude de l'alvéole d'abeille, corrigé

I

1) A(ABCD) = 1 donc AB = 1 donc P(ABCD) = $4 \times 1 = 4$

2) ABO est un triangle équilatéral de hauteur AB$\times\frac{\sqrt{3}}{2}$ et A(ABO) = $\frac{1}{6}\times$ A(ABCDEF) = $\frac{1}{6}$

donc A(ABO) = AB $\times$ AB$\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$ donc AB² = $\frac{4}{6\sqrt{3}}$ = $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ AB = $\frac{1}{3}(2\sqrt{3})^{0,5}$

d'où P(ABCDEF) = $6\times\frac{1}{3}(2\sqrt{3})^{0,5} = 2\,(2\sqrt{3})^{0,5} \approx 3,722$

3) $(4 - 2\,(2\sqrt{3})^{0,5})\times\frac{1}{4}\approx 0,07$ L'économie est d'environ 7 %

II

1) A(ABB''A') = $0,5 \times$ AB $\times$ [AA'+B'B''] = $0,5 \times 1 \times [\,3 + (3–x)\,] = 3 – 0,5x$

2) A''B'C''D'E''F' est un losange de centre H donc HF' = HB' = F'A'' = A''B' = 1
donc HF'A''B' est un losange. M est le milieu de [B'F'], c'est donc le milieu de [SA'']

SH = 0 ,5

a)

- SHM est un triangle rectangle en H donc d'après le théorème de Pythagore,
  SM² = SH² + HM²
  SM = $\sqrt{x^2 + 0,25}$
- [MB'] est une hauteur d'un triangle équilatéral A''B'H d'arête 1 donc MB' = $0,5\sqrt{3}$

b) A(F'A'B'S) = SM $\times$ MB' $\times 2 = \sqrt{x^2+0,25}\times 0,5\sqrt{3}\times 2 = \sqrt{3x^2+0,75}$

3) La surface est composée de 6 trapèzes et 3 losanges.
$S(x) = 6\times(\,3 - 0,5x\,) + 3\times\sqrt{3x^2+0,75} = 18 - 3x + 3\sqrt{3x^2+0,75}$

4) A l'aide de la calculatrice, on obtient que le minimum de S est obtenu pour $x \approx 0,35355339$

$x_0 \approx 0,354$ *remarque* : $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{4}$

5) MSB' est un triangle rectangle en M donc tan $\widehat{B'SM} = \frac{MB'}{MS}$

d'où $\widehat{F'SB'} = 2\times\widehat{B'SM} = 2\times\text{Arctan}(\frac{MB'}{MS}) = 2\times\text{Arctan}(\frac{0,5\sqrt{3}}{\sqrt{x_0{}^2+0,25}}) \approx 109°$ (≈ 109,47122)

180 – 109 = 71 donc $\widehat{SF'A'} \approx 71°$ (≈ 70,52878)