Extraction d'une racine carrée

Méthode de Héron – Etude de la suite

Si la fiche 1 a été faite, on peut faire modéliser la méthode de Héron par une suite.
Sinon, on peut traduire le texte afin de calculer le ou les premiers termes.

$$\begin{cases} u_0 = 27 & \text{avec } a = 720 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) \end{cases}$$

Remarque : u_0 peut être proche de $\sqrt{a}$ ou prendre n'importe quelle valeur.

Cherchons à nous approcher de la valeur de $\sqrt{118}$

Partie A : *Étude des termes :*

Une fois la modélisation faite, plusieurs démarches sont possibles

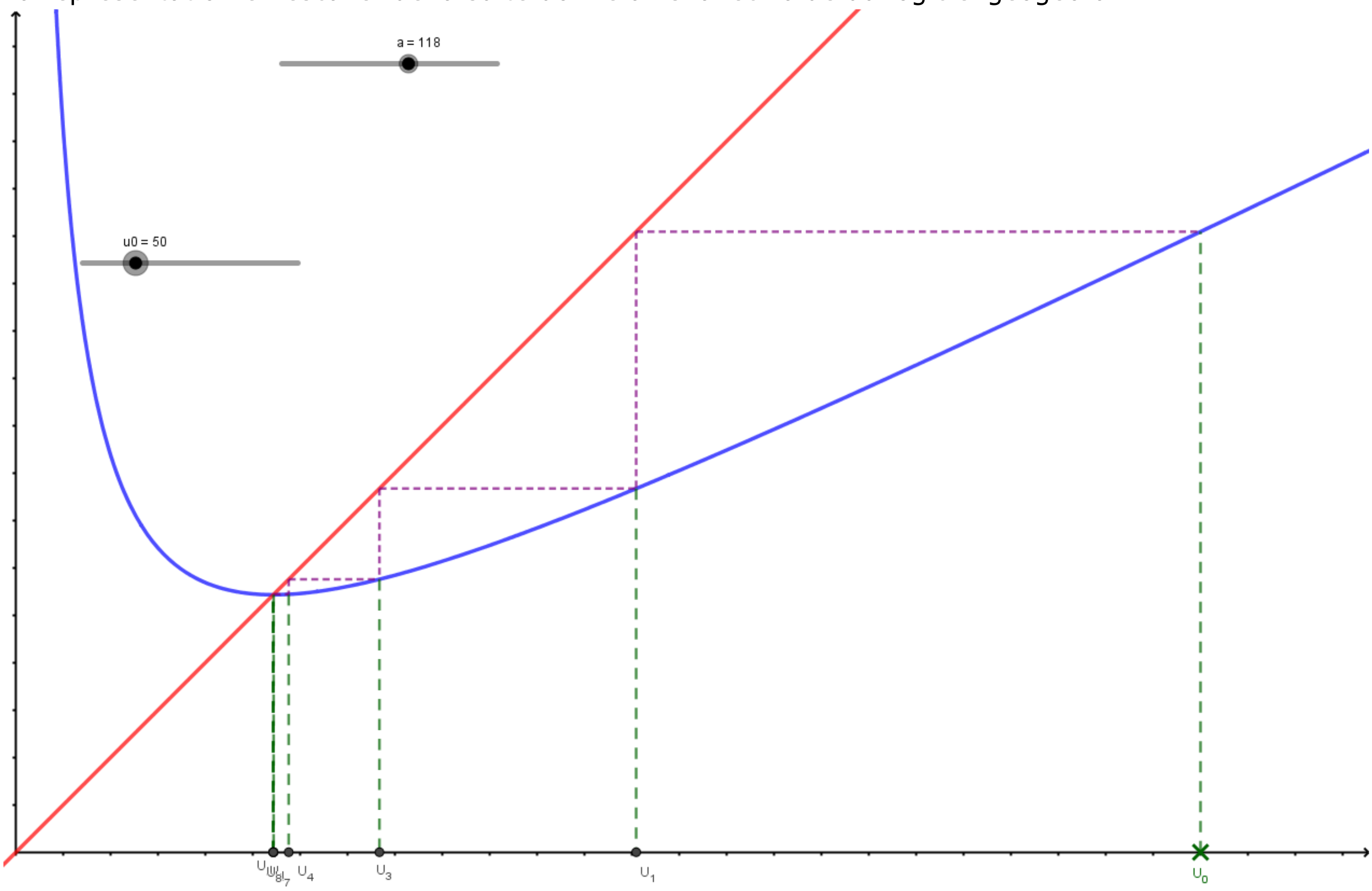
- Programmation dans le menu « récurrence » des calculatrices et conjecture
- Algorithme avec les calculatrices
- Algorithme sur Python (voir fichier Heron d'Alexandrie.py)

A chaque fois, le nombre de décimales proposées est plus important.
Il est intéressant de s'attarder sur la vitesse à laquelle on s'approche de la valeur de $\sqrt{118}$.

Partie B : *Étude graphique de la convergence :*

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$.

La représentation en escalier de la suite donne ainsi avec l'aide du logiciel géogébra :



L'utilisation des curseurs permet une visualisation rapide de différents cas.

Etude de la convergence :

1. Possibilité de montrer que pour n ≥ 1, $u_n \geq \sqrt{a}$, **sinon on l'admet**

Comme $u_0 > 0$ et $a > 0$ alors pour tout n $u_n > 0$

$$(u_{n+1})^2 - a = \left(\frac{u_n{}^2 + a}{2u_n}\right)^2 - a = \frac{u_n{}^4 + a^2 + 2au_n{}^2}{4u_n{}^2} - a = \frac{u_n{}^4 + a^2 - 2u_n{}^2}{4u_n{}^2} = \left(\frac{u_n{}^2 - a}{2u_n}\right)^2 \geq 0$$

Donc pour n ≥ 1 $(u_{n+1})^2 \geq a$ donc comme les termes sont positifs $u_n \geq \sqrt{a}$

2. Etude de la vitesse de convergence

$$u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) - \sqrt{a}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{u_n{}^2 + a}{u_n}\right) - \frac{2\,u_n\sqrt{a}}{2\,u_n}$$

$$= \frac{u_n{}^2 + a - 2\,u_n\sqrt{a}}{2u_n}$$

$$= \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2u_n}$$

$$\leq \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2\sqrt{a}}$$

Si a ≥ 1 et si $0 \leq u_n - \sqrt{a} \leq 10^{-p}$

Alors $0 \leq u_{n+1} - \sqrt{a} \leq \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2\sqrt{a}} \leq \frac{(10^{-p})^2}{2\sqrt{a}} \leq 10^{-2p}$

Donc on double le nombre de décimales à chaque étape.

Lien video : https://www.youtube.com/watch?v=F-CmD0H9oEw