Première	Devoir à la maison n°4	version 1	2019-2020

Exercice 1 : Utiliser les fonctions du second degré pour résoudre des problèmes /5

Une entreprise fabrique un produit. Pour une période donnée, le bénéfice réalisé par cette entreprise est exprimé, en euros, en fonction du nombre q de litres de produit vendus par : $B(q) = -2q^2 + 110q - 900$.

1) Pour quelle(s) production(s) le bénéfice est-il nul ?
2) Déterminer pour quelles quantités de produit vendues la production est rentable.

Exercice n°2 : résoudre un problème ouvert, mettre en équation /5

Une ville carrée de dimensions inconnues (les côtés étant orientés parallèlement aux directions Nord, Sud , Est et Ouest) comprend une porte au milieu de chacun de ses côtés. A l'extérieur de la ville, vingt pas après la sortie nord, se trouve un arbre. Si tu quittes la ville par la porte sud, marche quatorze pas vers le sud puis 1775 vers l'ouest et tu commenceras tout juste à apercevoir l'arbre.

Quelles sont les dimensions de la ville ?

(problème extrait des « neufs chapitres » , un classique mathématique en Chine)

Exercice n°3 : raisonner avec des lettres, lien entre racines et s et p /6

On considère le trinôme $x^2 - sx + p$ où s et p sont deux nombres réels,
et on suppose que $s^2 - 4p > 0$

1. a) Démontrer que ce trinôme a deux racines distinctes. Calculer leur somme et leur produit.
   b) On suppose que deux réels ont pour somme s et pour produit p.

Démontrer que ce sont les racines du trinôme$x^2 - sx + p$.

2. Applications.
   a) Un rectangle peut-il avoir un périmètre de 16 cm et une aire de 8 cm² ?
   b) Même question avec un périmètre de 6 m et une aire de 8 m² ?

Exercice n°4 : utilisation de deux formules du produit scalaire pour découvrir de nouvelles égalités /4

Soit ABCD un carré tel que AB=1. On considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre A passant par le point C. Soit E le point d'intersection de la demi-droite [AB) et du cercle $\mathcal{C}$.

1. Par des calculs d'angles dans des triangles, montrer que la valeur exacte de l'angle $\widehat{DCE}$ en radian est $\frac{5\pi}{8}$.
2. Calculer $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CE}$.
3. En déterminant $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CE}$ d'une deuxième façon, déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right)$.

Exercice 1 : Utiliser les fonctions du second degré pour résoudre des problèmes /5

Une entreprise fabrique un produit. Pour une période donnée, le bénéfice réalisé par cette entreprise est exprimé, en euros, en fonction du nombre q de litres de produit vendus par : $B(q) = -2q^2 + 110q - 900$.

1. Pour quelle(s) production(s) le bénéfice est-il nul ?
2. Déterminer pour quelles quantités de produit vendues la production est rentable.

Aides : 1. « bénéfice nul » signifie B(q)=0 : il faut donc résoudre une équation.

2. *La production est rentable si le bénéfice (argent récolté après paiement des coûts) est positif : on cherche à avoir B(q) > 0.*
   Pour résoudre une inéquation, on factorise, on dresse le tableau de signes et on répond au problème posé.

Exercice n°2 : mise en équation , équation quotient /9

Une ville carrée de dimensions inconnues (les côtés étant orientés parallèlement aux directions Nord, Sud , Est et Ouest) comprend une porte au milieu de chacun de ses côtés. A l'extérieur de la ville, vingt pas après la sortie nord, se trouve un arbre. Si tu quittes la ville par la porte sud, marche quatorze pas vers le sud puis 1775 vers l'ouest et tu commenceras tout juste à apercevoir l'arbre.

(problème extrait des « neufs chapitres » , un classique mathématique en Chine)

On cherche quelles sont les dimensions de la ville.

1. En posant x la longueur d'un côté de la ville, faire un schéma à main levée avec les données de l'énoncé.
2. En utilisant judicieusement le théorème de Thalès, déterminer une équation que doit vérifier la longueur x.
3. On veut résoudre l'équation : $\frac{20}{34+x} = \frac{x}{3550}$.
   a) Transformer l'équation en transposant les termes dans un même membre et en réduisant les fractions au même dénominateur.
   b) Montrer que l'équation se ramène à $\frac{71000-x^2-34x}{(34+x)3550} = 0$.
   c) On rappelle que $\frac{A}{B} = 0 \Leftrightarrow A = 0$. En utilisant ce résultat, résoudre l'équation précédente.
4. Conclure quant au problème posé.

Exercice n°3 : utilisation de deux formules du produit scalaire pour découvrir de nouvelles égalités /6

Soit ABCD un carré tel que AB=1. On considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre A passant par le point C. Soit E le point d'intersection de la demi-droite [AB) et du cercle $\mathcal{C}$.

1. Par des calculs d'angles dans des triangles, montrer que la valeur exacte de l'angle $\widehat{DCE}$ en radian est $\frac{5\pi}{8}$.
2. Calculer $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CE}$.
3. En déterminant $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CE}$ d'une deuxième façon, déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right)$.
4. Calculer la valeur exacte de $\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right)$.

Aides : 1. Faire un dessin, penser à noter ses angles en degré si cela aide.

1. *Penser à la première définition du produit scalaire et aux autres représentants des vecteurs.*
2. *Penser à la définition avec le cosinus et calculer la longueur CE en se plaçant dans le triangle CBE.*
3. *Penser au cours de trigonométrie et à la relation entre $\cos^2$ et $\sin^2$.*