Evolution de la géométrie

1. La réponse à un besoin
2. Un sujet d'étude défini, avec des règles et une exigence de démonstration
3. L'algèbre géométrique remplace l'algèbre
4. La géométrie analytique

La réponse à un besoin

Les babyloniens avaient quelques connaissances de propriétés des triangles (il semble qu'ils utilisaient la relation de Pythagore) et des notions de mesure (l'aire du disque était calculée avec une valeur de 3 puis plus tard de 3 1/8), ce qui leur permettaient des calculs rudimentaires d'aires et de volumes.

La réponse à un besoin

- Mais, Hérodote attribue à l'ancienne Egypte (-2000) l'invention de la géométrie en réponse aux problèmes posés par les crues du Nil: il faut après chaque crue redonner un terrain de surface équivalente à chacun.
- On n'émet pas un raisonnement théorique.

Geo: terre

Metron: la mesure

Un sujet d'étude en soi

- **Euclide** est un mathématicien grec du IIIè s av JC, fondateur de l'école mathématique d'Alexandrie. On lui attribue la paternité de treize livres: *Eléments* .
- Il y donne les premières définitions théoriques (point, ligne, droite, surface,…), pose 5 postulats et des axiomes, puis étudie des configurations et démontre des propriétés géométriques. Les objets géométriques deviennent des sujets d'étude théorique et la rigueur dans les démonstrations devient exigible.

L’algèbre géométrique rend inutile l’algèbre

La géométrie a tellement pris d’ampleur que l’algèbre ne se développe pas. Sur le fronton de l’académie de Platon, on pouvait lire: « *Nul n’entre ici s’il n’est géomètre* ».

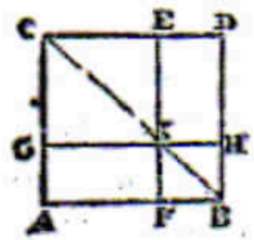
Les problèmes algébriques comme les résolutions d’équation ou les « calculs » littéraux sont traduits par des figures géométriques. Le produit de deux quantités est vu comme une aire:

« *Lorsque deux nombres se multipliant font un nombre, celui qui est produit se nomme plan et ses côtés sont les nombres multipliés* », définition donnée par Euclide dans le 7ème livre de ses *Eléments de mathématiques*

Une identité remarquable

Si vne ligne droicte eſt couppee comme on voudra; le quarré de la toute eſt egal aux deux quarrez des parties, & à deux fois le rectangle d'icelles parties.

Soit la ligne donnee AB, couppee comme on voudra au poinct F. Ie dis que les deux quarrez deſcrits ſur les parties AF & FB, auec deux fois le rectangle d'icelles AF & F B ſont enſemble egaux au quarré de la totale AB.



Qu'ainſi ne ſoit. Sur la ligne totale AB ſoit deſcrit le quarré AD; & apres auoir mené la diagonalle BC; du poinct F, ſoit menee la ligne droite FE parallele à AC, couppant la diagonalle BC en I, & derechef par iceluy poinct I ſoit menee GH parallele à AB, le tout par la 31. prop. 1. Ie dis premierement que les quadrilateres HF & EG ſont quarrez.

Car deſia il appert qu'ils ſont parallelogrammes, eſtans deſcrits entre

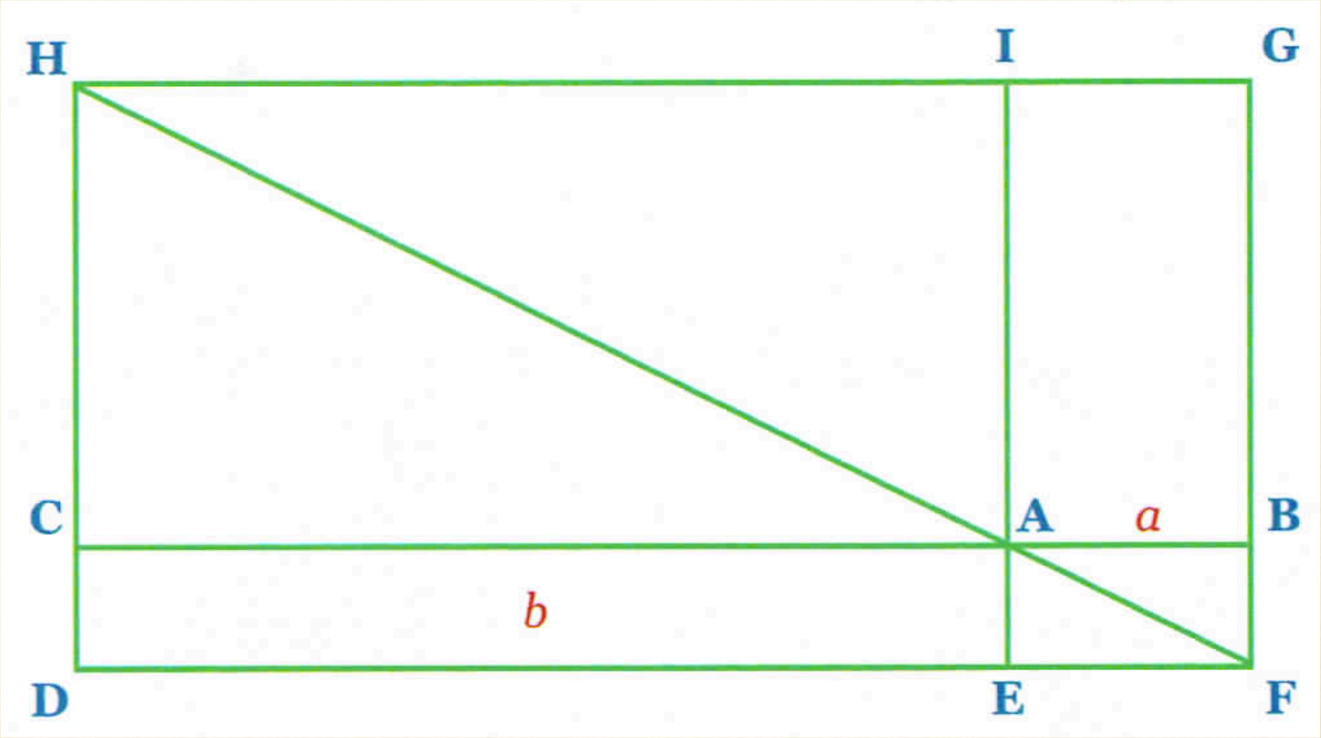
Identité remarquable à la manière d'Euclide

Une résolution d'équation

- Pour résoudre une équation que nous noterions actuellement $ax=b$, avec a et b des valeurs connues et x l'inconnue, les grecs interprétaient ax comme l'aire d'un rectangle de côtés a et x, cette aire devant être égale à b donc à l'aire d'une rectangle de côtés b et 1.
- Ils construisaient alors une figure afin de résoudre le problème.

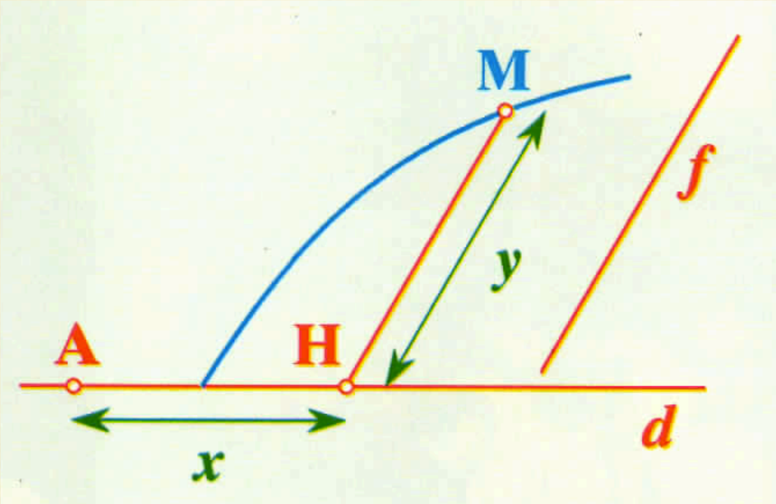
Une résolution d'équation

- La solution est la longueur ….

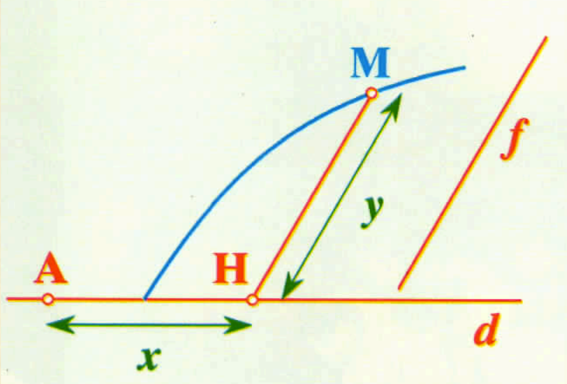


La géométrie analytique

- Il faut attendre le français **Descartes** (1596-1650), pour que les courbes géométriques puissent être décrites par une relation polynômiale entre l'abscisse et l'ordonnée. Il met en **relation les courbes d'une part et les nombres** d'autre part: c'est la géométrie analytique. Il introduit le mot abscisse.



- <u>Abscisse:</u> abréviation de l'expression « ligne scission » (coupée) car définie comme la distance entre un point origine et le projeté sur la droite d de référence(horizontale) selon une direction « ordonnée »



- <u>Ordonnée</u>: vient de *ordinatim applicatae* en latin, signifiant « régulier », correspondant aux segments régulièrement disposés sur une droite f définis par les projetés des points d'une courbe sur cette droite. (Pascal)

Pour résoudre un problème géométrique à l'aide de nombres, Descartes associait à un point M la distance de ce point à une droite donnée *d*, en mesurant cette distance dans la direction "ordonnée" par une autre droite *f*. En choisissant un point A sur *d*, il pouvait ainsi associer au point M les deux distances *y* et *x*, égales à MH et AH. Mais il était obligé de choisir la droite *d* la plus "basse" possible et le point A le plus à gauche possible pour que les nombres positifs *x* et *y* permettent de retrouver le point M. Aujourd'hui les coordonnées d'un point peuvent être aussi bien positives que négatives.

- En Allemagne, autour des années 1840, Grassmann développe une analyse géométrique indépendante du choix de coordonnées. Son point de départ est l'addition de forces, de vitesses, c'est-à-dire l'addition de vecteurs comme des segments orientés.
- Ses travaux le conduisent à définir un produit de vecteurs.