Chapitre 9

L'algèbre arabe : Al Khwarizmi vers 825

Sommaire

9.1 Présentation **139**
9.2 Un peu d'histoire **140**
9.3 Activité proposée **143**
9.4 Prolongements de l'activité **149**
9.5 Bibliographie **151**

9.1 Présentation

Fiche technique

Niveau : Classes de première.
Thème : Résolution de certaines équations du second degré avec des méthodes géométriques.
Durée : 2 heures.

Connaissances nécessaires

Identités remarquables, calculs algébriques.

Objectifs pédagogiques

Faire prendre connaissance de l'importance de l'algèbre arabe dans l'évolution de l'algèbre.
Lier l'algèbre et la géométrie.
Préparer l'introduction de la forme canonique d'un trinôme.
Utiliser la notion d'aire.

9.2 Un peu d'histoire

Mahomet, chassé de La Mecque en 622, y revient en vainqueur en 630 et meurt en 632. Pour ses successeurs, les califes, commencent les grandes périodes de conquête. Cents ans plus tard environ de grands centres culturels et scientifiques sont créés. C'est ainsi que se développe à Bagdad une civilisation brillante autour d'Al Mamoun, calife de 813 à 833. Les savants du *Bayt al-hikma*, la *Maison de la sagesse*, sont d'origine et de cultures diverses ; ils rassemblent les connaissances de leur époque, se procurent et traduisent des manuscrits grecs d'Euclide, Archimède, Apollonius, Diophante, Ptolémée, les textes des mathématiciens indiens ...

Parmi eux, le fondateur principal est sans doute Mohammed ibn Musa al Khwarizmi. Il est originaire de la ville nommée aujourd'hui Khiva et située en Ouzbékistan (il n'est donc pas d'origine arabe) dans la province du Khwarezm. Il est né vers 780 et meurt vers 850. L'Encyclopædia universalis ne cite que ses œuvres astronomiques, par lesquelles il connut la célébrité à son époque.

Le principal ouvrage mathématique d'Al Khwarizmi, considéré pendant longtemps comme un ouvrage de référence, est intitulé *Al Kitab al Mukhtasar fi Hisab al jabr wa-l-Muqabala* : *Livre concis du calcul par les procédés du jabr et du muqabala* (qu'on nous excuse pour l'orthographe arabe imparfaite). Rédigé vers 825, l'ouvrage est dédié au calife Al Mamoun et a des objectifs pratiques de calculs d'héritage, etc. Le mot *al jabr* est à l'origine du mot algèbre, ayant été conservé tel quel dans les premières traductions latines. En arabe, il exprime le remplissage ou la réduction d'une fracture ; il peut aussi être d'origine assyrienne. C'est l'opération consistant à ajouter aux deux membres d'une équation le même terme afin de faire disparaître les termes affectés du signe $-$. L'opération *al muqabala* consiste, elle, à retrancher aux deux membres des termes égaux pour rendre les choses plus symétriques.

Ainsi, avec nos notations, l'équation

$$4x^2 - 2x + 3 = 3x^2 + 2$$

devient :

$$4x^2 + 3 = 3x^2 + 2x + 2 \qquad \text{par } \textit{al jabr}$$

puis :

$$x^2 + 1 = 2x \qquad \text{par } \textit{al muqabala}.$$

Un ouvrage probablement ultérieur d'Al Khwarizmi, introduit à Bagdad les méthodes indiennes de calcul ; il traite d'arithmétique élémentaire, contient un premier exposé du système décimal et explique l'usage d'un petit cercle pour noter l'absence d'une unité, transmettant ainsi l'invention indienne du zéro pour noter l'absence d'unités, de dizaines, de centaines... À partir de 1150, il est à son tour traduit en latin à de très nombreuses reprises et diffusé dans toute l'Europe par des manuscrits appelés *algorismus*, déformation d'Al Khwarizmi, mot qui donne *algorithme* et a pris le sens de procédé de calcul que l'on sait. Le signe rond est alors appelé *circulus* ou *cifre*, transcription de l'arabe *as-sifr*. Le mot deviendra *chiffre* en français, *zéro* en italien.

Al Khwarizmi distingue six types d'équations de degré inférieur ou égal à 2 car, pour lui, les coefficients d'une équation sont toujours positifs :

$$ax^2 = bx\ ;$$

$$ax^2 = b\ ;$$

$$ax = b\ ;$$

$$ax^2 + bx = c\ ;$$

$$ax^2 + c = bx\ ;$$

$$ax^2 = bx + c.$$

Mais, à son époque, l'usage des lettres était inconnu et ceci est dit en phrases ; pour expliquer une méthode de résolution, il l'explicite sur un ou des exemples numériques.

Pour lui, l'équation $x^2 = 40x - 4x^2$, qui est $x^2 = 8x$, ne donne que la racine 8 ; par contre, pour l'équation $x^2+21 = 10x$, il donne les deux solutions 3 et 7 et affirme qu'il en est de même pour toutes les équations du cinquième type lorsque leur discriminant est strictement positif ; il est ainsi le premier à remarquer qu'une équation du second degré peut avoir plus d'une solution (voir ch. VIII 2.3) et à signaler le cas de racine double.

Même si des justifications géométriques sont longuement données, elles ne débouchent pas sur une construction mais seulement sur une justification puisqu'y figurent des segments de la longueur inconnue ; l'esprit de la méthode est bien algébrique.

Tout ceci sera sans doute plus clair en citant, d'après Youschkevitch, le texte d'Al Khwarizmi pour l'équation $x^2 + 21 = 10x$:

Divise en deux les racines ; ce qui donne 5 ; multiplie 5 par lui-même, tu obtiens 25 ; retire les 21 qui sont ajoutés au carré ; il reste 4 ; extrais la racine, cela donne 2, et retire-la de la moitié de la racine, c'est-à-dire de 5 ; il reste 3 ; c'est la racine du carré que tu cherches et le carré est 9. Si tu le désires, ajoute cela à la moitié de la racine, ce qui donne 7, qui est la racine du carré que tu cherches et le carré est 49. Si tu rencontres un problème qui se ramène à ce cas, examine alors sa justesse à l'aide de l'addition ; si tu ne le peux, tu obtiendras certainement (la solution) à l'aide de la soustraction. Parmi les trois cas dans lesquels on doit diviser en deux les racines , c'est le seul où l'on se serve de l'addition et de la soustraction. Sache en outre que si, *dans ce cas, tu divise en deux la racine, que tu la multiplies par elle-même et que le produit soit plus petit que les dirhams qui sont ajoutés au carré, alors le problème est impossible. Mais s'il est égal aux dirhams, la racine du carré est égale à la moitié de la racine, sans qu'on ajoute ou retire quoi que ce soit.*

Le rôle du discriminant et de son signe est ici nettement mis en évidence : s'il est strictement négatif, l'équation est impossible, s'il est nul, elle a une racine seulement (qui n'est pas qualifiée de racine double).

On a beaucoup discuté des origines des connaissances d'Al Khwarizmi. Faut-il y voir une influence grecque alors que les méthodes ne ressemblent pas aux méthodes euclidiennes, pourtant traduites depuis quelques années en arabe ? Une influence des mathématiciens indiens tels que Brahmagupta, plus avancés que lui, utilisant déjà, par exemple, des nombres négatifs ? Une utilisation de connaissances mathématiques communes dans le Moyen Orient à cette époque ?

Nous allons maintenant considérer trois équations du second degré proposées dans l'algèbre d'Al Khwarizmi. Ces équations correspondent aux trois types d'équations complètes de degré 2. On ne s'occupera que des racines positives de ces équations.

Avant l'activité, on donnera aux élèves quelques extraits de cet aperçu historique, au gré de chacun. On peut aussi piocher dans les ouvrages cités en bibliographie.

9.3 Activité proposée

9.3.1 Texte

Énoncé 1

Un carré et dix de ses racines sont égaux à 39 dirhams.

Questions

En algèbre, Al Khwarizmi considère plusieurs sortes de nombres : les nombres simples ou dirhams (de la drachme, monnaie grecque), les racines, les carrés qui sont les produits de racines par elles-mêmes. Dans la suite on dira plutôt nombre que dirham.

1) Ecrire l'équation E_1 que veut résoudre Al Khwarizmi.

La justification de la méthode de résolution de l'équation donnée par Al Khwarizmi s'appuie sur une figure géométrique. Il cherche à déterminer le côté x d'un carré $ABCD$ de telle manière que, si on lui ajoute deux rectangles de côtés x et 5, $BEFC$ et $DCHI$, on obtienne une figure $AEFCHI$ dont l'aire soit 39.

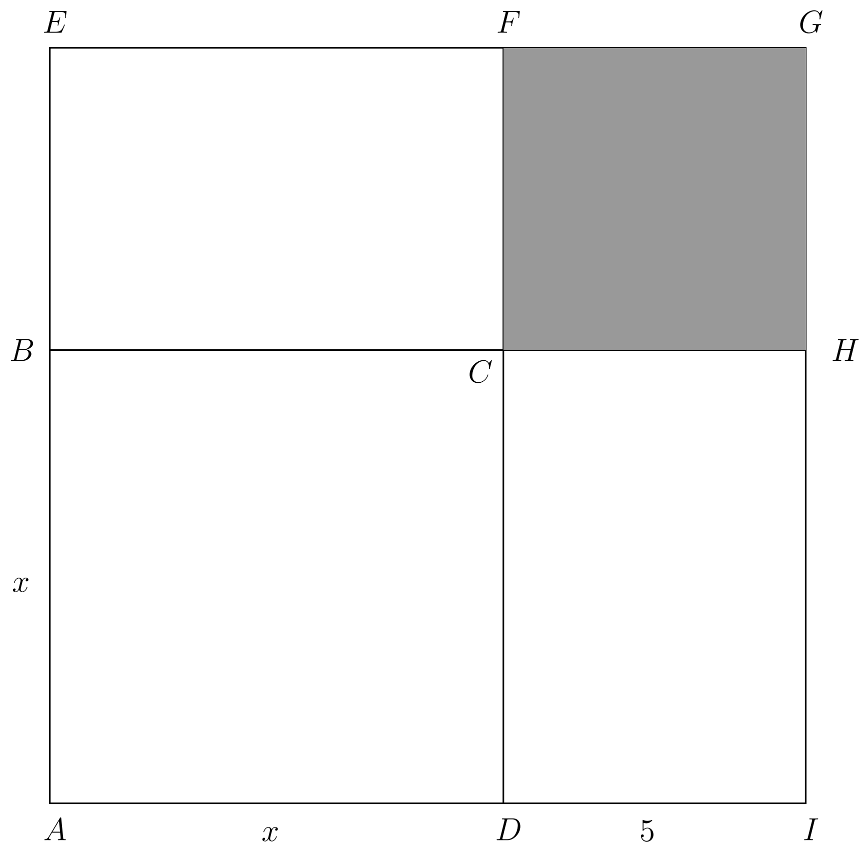

FIG. 9.1 – Équation E_1.

2) Exprimer l'aire $\mathcal{A}_1$ de la figure $AEFCHI$ en fonction de x. Quelle est l'aire $\mathcal{A}_2$ du carré hachuré ? En exprimant de deux manières l'aire du carré $AEGI$, trouver une équation qui permette de calculer x. Quelle est la valeur de x calculée par Al Khwarizmi ?

3) Résoudre algébriquement l'équation E_1.

Quelle est la valeur qu'Al Khwarizmi n'obtient pas ?

4) Résoudre l'équation $x^2 + 12x = 85$:

a) par la méthode d'Al Khwarizmi ;

b) par la méthode algébrique usuelle.

Énoncé 2

Un carré et vingt et un nombres égalent dix de ses racines.

Questions

1) Ecrire l'équation E_2 que veut résoudre Al Khwarizmi.

Ici encore, la méthode de résolution de l'équation donnée par Al Khwarizmi s'appuie sur une figure géométrique. Il cherche à déterminer le côté x d'un rectangle $ABCD$ tel que $BC = x$ avec $x < 5$ et $AB = 10$, de telle manière qu'il se décompose en deux figures, l'une ayant l'aire d'un carré de côté x, l'autre ayant une aire de 21. Dans la figure, $AEKD$ est un carré de côté x, F est le milieu de AB, $FBGI$ est un carré de côté 5 et $IJLH$ est un carré.

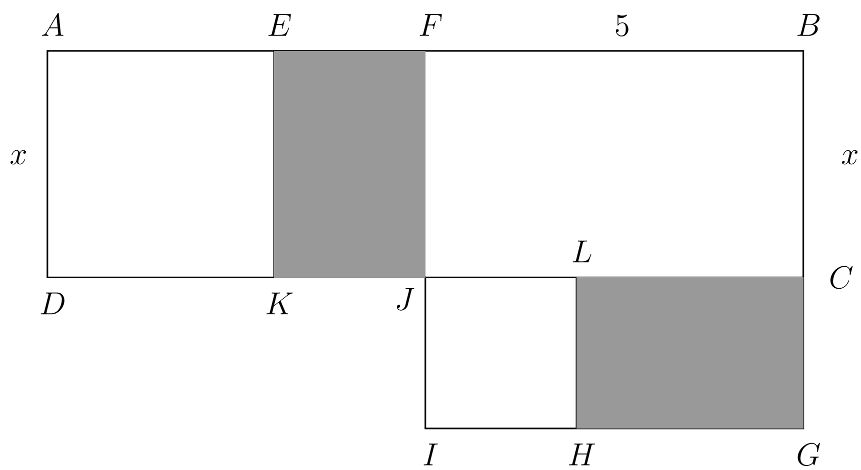

FIG. 9.2 – Équation E_2, figure pour la petite racine.

2) Déterminer, en fonction de x, les longueurs JL et LC.
Montrer que Aire$(EFJK)$ = Aire$(CGHL)$.
En déduire l'aire de la figure $BGHLJF$, puis l'aire du carré $IJLH$.
Déterminer la longueur JL puis la valeur de x.
3) Résoudre algébriquement l'équation E_2.
Combien cette équation a-t-elle de racines positives ?

4) On considère la figure ci-dessous, où $AB = 10$, $AF = 5$, $AD = x$ avec $10 > x > 5$ et où $AEKD$, $FBGI$ et $IJLH$ sont des carrés.

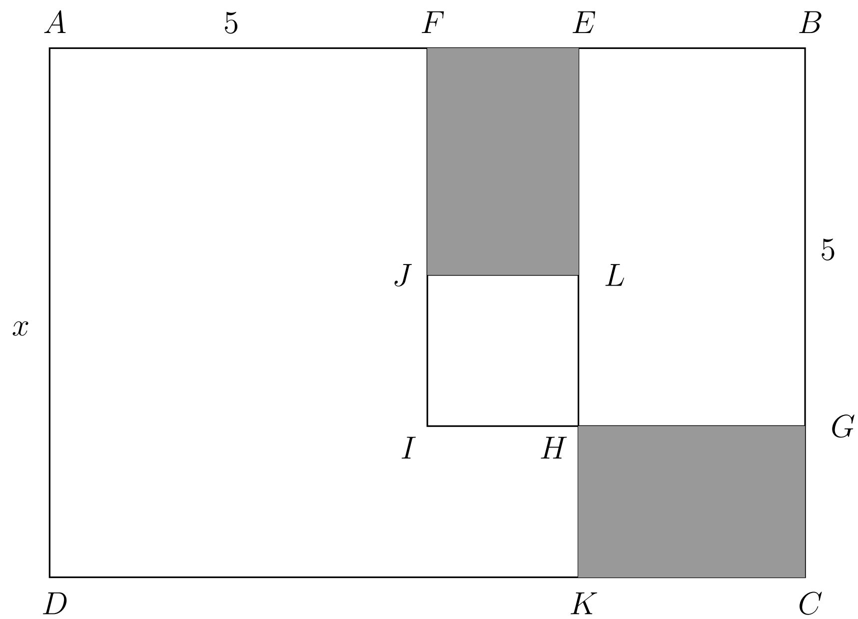

FIG. 9.3 – Équation E_2, figure pour la grande racine.

Montrer, en s'inspirant de la méthode du 2), comment cette figure permet de déterminer la seconde solution de E_2.

Énoncé 3

Un carré égale trois de ses racines et quatre nombres.

Questions

1) Ecrire l'équation E_3 que veut résoudre Al Khwarizmi.

Ici aussi, la méthode de résolution algébrique de l'équation donnée par Al Khwarizmi s'appuie sur une figure géométrique. Il cherche à déterminer le côté x d'un carré de façon qu'il puisse se décomposer en deux rectangles, le premier de côté 3 et x, le second ayant une aire égale à 4 : $ABCD$ est un carré de côté x, $DF = 3$, E est le milieu de $[DF]$, $AGJE$ est un carré et $EFLK$ aussi.

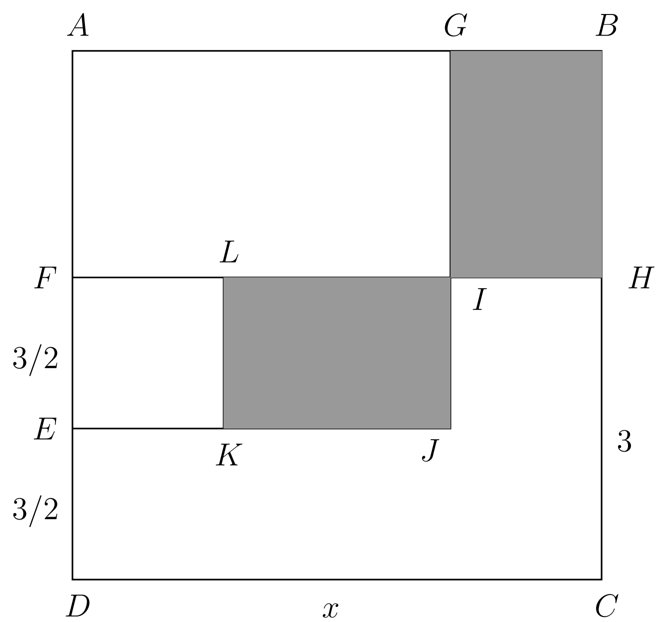

Fig. 9.4 – Équation E_3.

2) Quelle est l'aire du carré $EFLK$?
Quelle est l'aire du carré $AGJE$?
Montrer que Aire($BHIG$) = Aire($IJKL$).
En déduire l'aire de la figure $AGJKLF$.
Déterminer la valeur de x trouvée par Al Khwarizmi.
3) Résoudre algébriquement l'équation E_3.
Quelle valeur de x n'obtient-on pas par cette méthode ?
4) Résoudre l'équation : $x^2 = 5x + 14$:
a) par la méthode d'Al Khwarizmi, pour obtenir la racine positive ;
b) par la méthode algébrique usuelle.

9.3.2 Réaction des élèves

La surprise des élèves est forte à la lecture de l'énoncé concernant l'équation E_1. Ensuite, il n'y a pas de difficulté pour comprendre les autres énoncés.

Énoncé 1

Une fois l'énoncé compris, il est facile de trouver l'équation. La plupart des élèves commencent par refaire la figure, ce qui leur permet de traiter la question 2. Les élèves voient le lien de la question 3 avec la précédente et, pour la question 4, calquent le raisonnement fait auparavant.

Énoncé 2

L'écriture de E_2 est immédiate mais la seconde figure est plus difficile à maîtriser que la première et les élèves peinent pour résoudre la question 2). Seuls ceux qui réussissent à bien comprendre les deux figures ont réussi la question 4).

Énoncé 3

Cette partie a été mieux réussie que la précédente car elle faisait appel aux mêmes notions. A noter cependant quelques erreurs de calculs dans la méthode algébrique dues au fait que le coefficient de x, impair, ne se divise pas par 2 dans .

Dans cette activité, la résolution des équations algébriques en s'appuyant sur des figures géométriques a beaucoup intrigué les élèves. Ils ont trouvé ces méthodes longues à cause des tracés. Une autre remarque est souvent apparue : pourquoi fallait-il adopter des méthodes différentes suivant les cas ? L'unification des méthodes n'était pas encore réalisée, elle n'était donc pas évidente ; c'est une leçon de cette histoire.

9.3.3 Explications complémentaires

Il faut faire remarquer que le produit de deux nombres représente l'aire d'un rectangle et le carré d'un nombre représente l'aire d'un carré. Il est important que les élèves refassent les figures, cela leur permet d'aborder plus facilement les questions 2.

La seconde figure pour l'équation E_2 peut ne pas être fournie aux élèves pour provoquer une recherche complémentaire, difficile même pour les meilleurs. On peut répondre au 4) en suivant la démarche suivante :

$EL = 5 - (x - 5) = 10 - x$;

$\text{Aire}(FELJ) = (x - 5)(10 - x) = \text{Aire}(HGCK)$;

$\text{Aire}(FBGHLJ) = \text{Aire}(EBCK) = x(10 - x) = 21$;

$IJ^2 = \text{Aire}(JLHI) = \text{Aire}(FBGI) - \text{Aire}(FBGHLJ) = 25 - 21 = 4$,
d'où $IJ = 2$, $x = 7$.

L'utilisation d'un rétroprojecteur est conseillée : montrer des figures sur des transparents, avec des couleurs, débloquera certains.

Cette activité a servi d'introduction au cours sur le second degré ; la forme canonique y apparaît naturellement. Par la suite, plusieurs élèves ont continué a mettre sous cette forme plutôt que de calculer le discriminant, au moins dans le cas où le coefficient de x est pair.

9.4 Prolongements de l'activité

Equation E_1 : $x^2 + 10x = 39$

La première figure que donne Al Khwarizmi pour la résolution de l'équation E_1 correspond à la résolution d'une équation de la forme $x^2 + ax = b$ par le calcul algébrique habituel :
$x^2 + 2(a/2)x + a^2/4 = b + a^2/4$,
$(x + a/2)^2 = b + a^2/4$, etc.

Ce type d'équation peut aussi être résolue géométriquement à partir de la proposition 6 du livre 2 des Éléments d'Euclide (voir ch. III, 3.1).

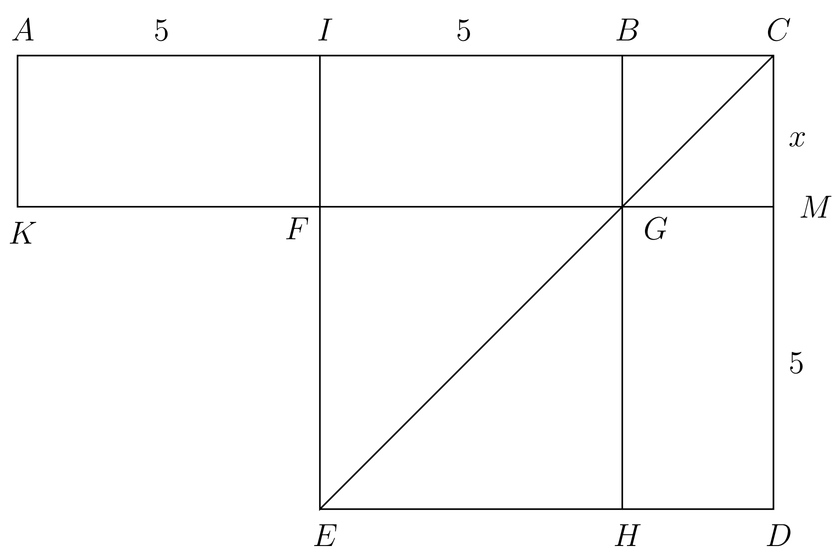

Fig. 9.5 – Équation E_1, autre figure.

Rappelons que, dans la figure, $ICDE$ est un carré ainsi que $BCMG$ et que I est le milieu de $[AB]$. Euclide démontre que : $AC.CB + IB^2 = IC^2$, autrement dit : Aire($ACMK$) + Aire($FGHE$) = Aire($ICDE$) puisque les rectangles $AIKF$ et $GMDH$ sont égaux.

Posons $CM = x$, $AI = IB = MD = 5$. On remarque que :
Aire($ACMK$) = Aire($BCMG$) + Aire($ABGK$) $= x^2 + 10x$.

On cherche donc à déterminer x de façon que l'aire de $ACMK$ soit 39. A l'aide de la proposition d'Euclide, l'équation s'écrit $39 + 25 = (x + 5)^2$, d'où sa solution positive : $x = 3$.

La seconde figure d'Al Khwarizmi est très peu différente de celle d'Euclide. Elle correspond à la résolution d'une équation de la forme $x^2 + ax = b$ par le calcul algébrique :

$x^2 + 2(a/2)x + a^2/4 = b + a^2/4$,

$(x + a/2)^2 = b + a^2/4$, etc.

Equation E_2 : $x^2 + 21 = 10x$

Cette fois-ci, c'est la proposition 5 du livre 2 des Eléments d'Euclide qui peut être appliquée.

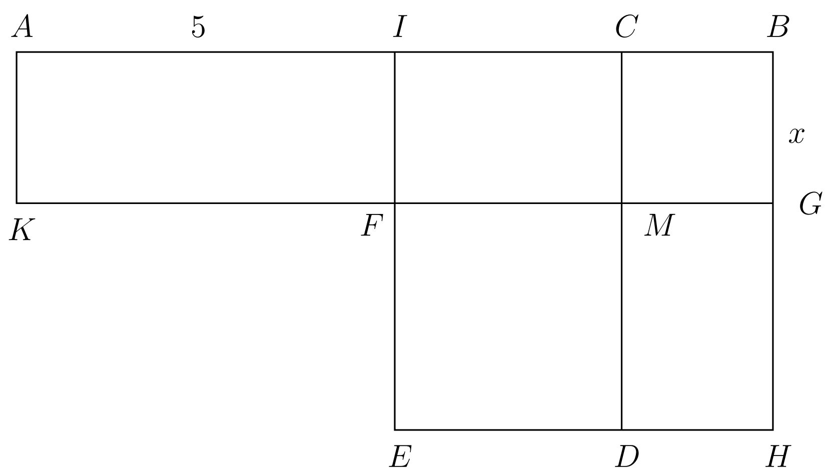

FIG. 9.6 – Équation E_2, autre figure.

Dans la figure, C est un point entre I et B, $IBHE$ et $CBGM$ sont des carrés, I est le milieu de $[AB]$. Euclide démontre que $AC.CB + IC^2 = IB^2$; en effet, en terme d'aires :

$AC.CB = \text{Aire}(ACMK) = \text{Aire}(AIFK) + \text{Aire}(ICMF)$,

$IC^2 = \text{Aire}(FMDE)$, $IB^2 = \text{Aire}(IBHE)$,

et la proposition résulte de $\text{Aire}(CBHD) = \text{Aire}(IBGF) = \text{Aire}(AIFK)$.

Posons $CB = CM = x$, $AI = IB = BH = 5$, avec $x < 5$. On remarque que :

$\text{Aire}(ACMK) = \text{Aire}(ABGK) - \text{Aire}(CBGM) = 10x - x^2$.

On cherche donc à déterminer x de façon que l'aire de $ACMK$ soit 21. A l'aide de la proposition d'Euclide, l'équation s'écrit $21 + (5 - x)^2 = 25$, d'où la solution : $x = 3$.

9.5 Bibliographie

Collette Jean-Paul, *Histoire des mathématiques*, tome 1, Vuibert, 1973.
Dedron Pierre, Itard Jean, *Mathématiques et mathématiciens*, Magnard, 1959.
Euclide : voir chapitre III.
M.A.T.H. : IREM Paris VII, n°79, janvier 1990.
Youschkevitch Adolf P., *Les mathématiques arabes (VIIIème-XVème siècles)*, Vrin, 1976.

Un livre très clair, très riche et très précis. L'exemplaire de la bibliothèque de l'IREM de Rennes a malheureusement disparu.

Fig. 9.7 – Une traduction latine du traité d'algèbre d'al Khwarizmi.